Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 10 giugno 2019

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre sul campo $\mathbb{K}$. Sia $f \in \mathrm{End(V)}$ tale che $f^3 - 3f^2 = 0$.

a) Mostrare che se $\mathbb{K}$ non ha caratteristica tre f^2 è diagonalizzabile, e determinare le possibili classi di coniugio di f.

b) È ancora vero che f^2 è diagonalizzabile se $\mathbb{K}$ ha caratteristica tre? (fornire una dimostrazione in caso affermativo o un controesempio in caso negativo). Determinare le possibili classi di coniugio di f.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre sul campo $\mathbb{K}$. Sia β una forma bilineare su V la cui matrice, rispetto a una base $\mathcal{B}$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Quale ipotesi sul campo $\mathbb{K}$ assicura che β non sia degenere?

b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di β sia

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

c) Trovare una base ortogonale per β.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione tre sul campo $\mathbb{R}$, e sia $f \in \mathrm{End(V)}$ tale che $f^2 - 5f + 6I = 0$.

a) Mostrare che esistono infiniti sottospazi f-invarianti di dimensione due.

b) Esistono prodotti scalari rispetto ai quali f è autoaggiunto?

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e sia W lo spazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Mostrare che esiste $\widehat{f} : \mathbb{R}^4/W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f = \widehat{f} \circ \pi$, dove $\pi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$ è la proiezione canonica sul quoziente.

b) Che dimensione ha $\ker \widehat{f}$?