Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B - II appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 2 luglio 2019

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $M \in M_n(\mathbb{Q})$ una matrice tale che $M^2 = M$ e $trM = k$.

a) Mostrare che M è diagonalizzabile e determinare una matrice diagonale simile ad M;

b) mostrare che k è un numero intero, $0 \leq k \leq n$, e che $rg(M) = k$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 2. Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica su V definita nel modo seguente:

$$\beta(p, q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

a) Determinare la matrice di β rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di V e calcolare la segnatura di β.

b) Determinare il radicale di β.

c) Dato $W = \langle x + x^2 \rangle$, calcolare $W^\perp$.

Esercizio 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica triangolabile.

a) Mostrare che esiste una matrice ortogonale H tale che $H^{-1}AH = B$ sia triangolare superiore.

b) Mostrare che $B = -B^T$ e dedurre che $A = 0$.

Esercizio 4. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Mostrare che $Ann\, W \cap Ann\, U = Ann(W + U)$.