Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B - IV appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 18 luglio 2019

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2. Sia $F : V \to V$ un endomorfismo di polinomio caratteristico $x(x-1)(x-2)$.

a) Mostrare che esiste $v \in V$ tale che $Span\{v, F(v), F^2(v)\} = V$. Dare un esempio di endomorfismo F in cui questo non accade.

b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Sia $F : V \to V$ un endomorfismo il cui polinomio minimo q_F ha grado strettamente minore di $\dim V$. Mostrare che non esistono vettori $v \in V$ tali che $Span\{F^a(v)\}_{a\in\mathbb{N}} = V$.

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $B_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia β_B la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita da tale matrice.

a) Determinare, al variare di α, la segnatura di β_B. Dire in particolare per quali valori di α la forma è non degenere, e per quali valori esistono vettori isotropi non nulli.

b) Determinare, al variare di α, il tipo (ellisse, iperbole, parabola, coppia di rette incidenti, ellisse senza punti reali o con un solo punto reale, etc...) della conica di equazione

$$x^2 + 2\alpha xy + 2x + y^2 + 2 = 0.$$

Esercizio 3. Sia $F \in End(V)$ e sia $L_F : End(V) \to End(V)$ definito da $L_F(X) = F \circ X$. Mostrare che F e L_F hanno lo stesso polinomio minimo.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su un campo $\mathbb{K}$, con una base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Sia F l'endomorfismo tale che $F(v_1) = v_2, F(v_2) = v_3, F(v_3) = v_1$.

a) Studiare la diagonalizzabilità di F, o, se questo non è diagonalizzabile, la sua forma di Jordan, nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} =$ un qualsiasi campo di caratteristica 3.

b) Sia più generalmente p un primo, sia V uno spazio vettoriale di dimensione p con una base $\{v_1, \cdots, v_p\}$ e sia $F \in End(V)$ definito da $F(v_i) = v_{i+1}$ per $i = 1, \cdots, p-1$, e $F(v_p) = v_1$. Studiare la diagonalizzabilità di F, o, se questo non è diagonalizzabile, la sua forma di Jordan, nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$, $K =$ un qualsiasi campo di caratteristica p.