Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B - IV appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 settembre 2019

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia β la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se β è degenere.

b) Determinare i vettori isotropi rispetto a β e stabilire se essi costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due tale che la restrizione di β a W sia definita positiva.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su un campo $\mathbb{K}$ e sia f un endomorfismo di V con polinomio caratteristico $p_f(x) = (x-1)^2(x+1)$. Determinare le possibili classi di coniugio di f e stabilire se queste dipendono dalla caratteristica di $\mathbb{K}$.

Esercizio 3. Sia $U \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice con tutti i coefficienti uguali ad 1. Calcolare il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di U e stabilire se questi dipendono dalla caratteristica di $\mathbb{K}$.

Esercizio 4. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica cioè tale che $A = -A^T$ e sia $p_A(t)$ il suo polinomio caratteristico. Mostrare che:

1) $p_A(t) = (-1)^n p_A(-t)$;

2) se t_0 è un autovalore complesso non nullo di A allora t_0 è immaginario puro.