

**Corso di Laurea in Matematica**  
GEOMETRIA 1B -  
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini  
Bologna, 27 Gennaio 2020

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

**Esercizio 1.** Dato  $a \in \mathbb{Q}$  sia  $\beta_a$  la forma bilineare su  $\mathbb{Q}^4$  associata alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare per quali valori di  $a$  la forma  $\beta_a$  è degenere.
- b) Determinare per quali valori di  $a$  esistono sottospazi isotropi di dimensione due per  $\beta_a$ .
- c) Esistono valori di  $a$  per i quali esistono sottospazi isotropi di dimensione maggiore di due?

**Esercizio 2.** Sia  $k$  un intero positivo e sia  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tale che  $A^k = I$ .

- a) Mostrare che se  $A$  ha un solo autovalore allora  $A$  è un multiplo di una matrice scalare.
- b) Dare un esempio di una matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  che soddisfi  $A^k = I$  e che abbia più autovalori. Esistono  $A \in M_n(\mathbb{C})$  non diagonalizzabili con tale proprietà?

**Esercizio 3.** Siano  $A, B \in M_4(\mathbb{Q})$  due matrici nilpotenti, tali che

$$\dim \ker A^2 > \dim \ker A + 1, \quad \dim \ker B^2 > \dim \ker B + 1.$$

Mostrare che  $A$  e  $B$  sono simili.

**Esercizio 4.** Sia  $F : M_n(\mathbb{Q}) \rightarrow M_n(\mathbb{Q})$  definita da  $F(X) = 2X + 3X^T$ .

- a) Determinare autovalori e autovettori di  $F$ ;
- b) Determinare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di  $F$ .
- c)  $F$  è diagonalizzabile?
- d) Le risposte alle domande precedenti sono vere se i coefficienti della matrici, invece che nel campo  $\mathbb{Q}$ , sono in un campo di caratteristica 2? E se il campo ha caratteristica 3?