Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B -
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 17 febbraio 2020

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ e siano U e W due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^3$, entrambi di dimensione 2, tali che $\beta|_U$ e $\beta|_W$ abbiano rango 1 e $\beta|_{U\cap W}$ sia definita positiva.

a) Mostrare che β non può avere rango 2.

b) Nei casi in cui β è non degenere, calcolare la segnatura di β.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio.

a) Data $f \in \mathrm{End}(V)$ e indicata con $\pi : V \to V/W$ la proiezione naturale sul quoziente, mostrare che esiste un'applicazione lineare $f' : V/W \to V$ tale che $f' \circ \pi = f$ se e solo se $W \subseteq \ker(F)$.

b) Dimostrare che $Ann(W)$ e $(V/W)^*$ sono spazi vettoriali isomorfi costruendo un isomorfismo esplicito.

Esercizio 3. Calcolare la forma canonica di Jordan di una matrice definita a blocchi

$$B = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

dove $M \in M_2(\mathbb{C})$ è una matrice quadrata di ordine 2 non diagonalizzabile, e dedurne il polinomio minimo.

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}^n$ si consideri il prodotto scalare standard e sia F il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$ definito da

$$F = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid Av \in (\mathrm{Span}\, v)^\perp, \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Mostrare che F coincide con il sottospazio $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.