Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A
Prova di autovalutazione
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 novembre 2018

Esercizio 1. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 0\}$. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$ nei seguenti casi:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Costruire, se possibile, una funzione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$f(1, 0, 1) = (1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (1, 1), \quad f(2, 0, 3) = (2, 2).$$

Calcolare la controimmagine del vettore $(-1, -1)$ mediante la funzione f costruita.

Esercizio 3. Siano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, $V = span\{(2, 1, 2), (1, 1, 1)\}$ e $T = span\{(1, 0, 0)\}$.

a) Determinare una base di $U \cap V$;

b) Mostrare che $T \oplus U = \mathbb{R}^3 = T \oplus V$;

c) Indicate rispettivamente con π_T e π'_T le proiezioni su T rispetto alle decomposizioni $\mathbb{R}^3 = T \oplus U$ e $\mathbb{R}^3 = T \oplus V$, determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $\pi_T(v) = \pi'_T(v) = (1, 0, 0)$.