Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A : Prova di autovalutazione
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 2 novembre 2020

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Una applicazione lineare $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ è suriettiva se e solo se è non nulla.
2. Ogni matrice è combinazione lineare di matrici di rango 1.
3. Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente dipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, allora esistono λ e σ in $\mathbb{K}$ tali che $v_1 = \lambda v_2 = \sigma v_3$.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{K}$, determinare gli insiemi:

- $R_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ esiste un'unica $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;
- $S_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ non esiste alcuna $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;
- $T_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ esistono infinite $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^4$:

$$U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} \quad V = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0,\ x - y + z - 2t = 0\}.$$

(a) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

(b) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) Quanti elementi ha il sottospazio $U \cap V$ se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Esercizio 3. Siano $C = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e $S = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Mostrare che l'insieme

$$\mathcal{H} = \{f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \mid f(C) \subseteq S\}$$

è un sottospazio vettoriale di $Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione. Esistono applicazioni suriettive in $\mathcal{H}$?