Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Esempio di prova d'esame
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

Esercizio 1. Elencare tutte le forme di Jordan che hanno polinomio caratteristico $(\lambda-1)^2(\lambda+2)^3$. Tra queste determinare quella che ha polinomio minimo $(\lambda-1)(\lambda+2)^2$.

Esercizio 2. Siano V uno spazio euclideo e $T : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Mostrare che se $T^2 = T$ allora T è la proiezione ortogonale lungo un sottospazio U di V. Chi è U?

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare $\langle\, , \,\rangle$ e sia f un endomorfismo di V. Calcolare rango e segnatura della forma bilineare $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $\beta(v, w) = \langle f(v), f(w)\rangle$.

Esercizio 4. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $q(X) = X^T BX$. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi q. Descrivere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la superficie di $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione $q(X) - a = 0$.