Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Esempio di prova d'esame
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

Esercizio 1. Siano $U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $V = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Determinare, se possibile, una matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$ avente U come autospazio relativo all'autovalore 0 e V come autospazio relativo all'autovalore 1.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\, , \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia f un endomorfismo di V avente tutti gli autovalori reali. Si dimostri che esiste una base ortonormale di V a ventaglio per f.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare. Sia f un endomorfismo di V e sia f^{ad} l'endomorfismo aggiunto.

a) Mostrare che l'endomorfismo $g = f + f^{ad}$ è autoaggiunto.

b) Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Stabilire che relazione c'è tra le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{ad})$.

c) Dedurre da $a)$ e $b)$ che esiste una base ortonormale di V rispetto alla quale la matrice $A = (a_{ij})$ di f soddisfa la relazione $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni $i \neq j$.

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare polinomio caratteristico, polinomio minimo e forma canonica di Jordan della matrice A.

b) Stabilire se esiste una matrice invertibile $H \in M_3(\mathbb{R})$ tale che le matrici $H^{-1}AH$ e $H^{-1}BH$ siano entrambe triangolari superiori. In caso affermativo determinare H.