Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A
Esempio di prova d'esame
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini

Domande preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

a) Gli spazi vettoriali $M_2(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^4$ sono isomorfi.

b) Un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

c) Date $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ è sempre vero che $AB \neq BA$.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

Esercizio 1. Stabilire se esistono campi $\mathbb{K}$ tali che l'applicazione

$$C : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$$

$$p \mapsto p^3$$

sia lineare.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ t-s \\ 2t+3s \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che f è iniettiva;

b) determinare una base di $Im(f)$;

c) descrivere $Im(f)$ mediante equazioni cartesiane.

Esercizio 3. Si considerino due matrici del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$. Dimostrare che se A e A' sono simili allora $a \neq d$. Vale anche il viceversa?

Esercizio 4. Sia $v \neq 0$ un autovettore di un endomorfismo $f : V \to V$ relativo ad un autovalore non nullo.

a) Mostrare che $v \in Imf$;

b) dedurre che se f è diagonalizzabile allora $V = Imf \oplus \ker f$;

c) stabilire se è vero, viceversa, che se $V = Imf \oplus \ker f$ allora f è diagonalizzabile.