Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A
Esempio di prova d'esame
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini

Domande preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

a) $\mathbb{R}^2$ contiene infiniti sottospazi di dimensione uno.

b) Non esiste alcuna applicazione lineare invertibile $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^2$.

c) Ogni matrice invertibile è diagonalizzabile.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi

Esercizio 1. Sia $W \subset \mathbb{K}_{\leq 3}[x]$ definito da

$$W := \{p \in \mathbb{K}_{\leq 3}[x] \mid 0 = p(0) = p(-1) = p(1).\}$$

Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}_{\leq 3}[x]$ ed esibire una base di W nei seguenti casi:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

In ciascun caso completare la base di W trovata in una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}_{\leq 3}[x]$ e determinare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Esercizio 2. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito da

$$V := \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Dimostrare che $f_A(V) \subset V$ e quindi è possibile definire un'applicazione lineare
$$f : V \to V$$
$$X \mapsto f_A(X).$$
2. Sia $\mathcal{B}$ la base di V data da $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Stabilire se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $V = U \oplus T$ una sua decomposizione in somma diretta di sottospazi. Sia $\pi_U : V \to V$ la proiezione di V su U rispetto alla decomposizione fissata. Determinare $\ker(\pi_U)$, $Im(\pi_U)$ e stabilire se π_U è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia V il seguente sottospazio di $\mathbb{K}^4$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 + \cdots + x_4 = 0\}.$$

Costruire una base di V^*.