Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 1 febbraio 2021

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e si consideri la seguente forma bilineare su V:

$$\beta(A, B) = tr(AB) + tr(A)tr(B).$$

a) Dimostrare che β è simmetrica.

b) Calcolare la segnatura di β.

c) Determinare una base di V ortogonale rispetto a β.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $T^3 = 2T^2$.

a) Quali sono le possibili tracce degli endomorfismi T in $\mathcal{A}$?

b) È vero che se $T \in \mathcal{A}$ è diagonalizzabile allora $tr(T) > 3$?

c) Mostrare che se $T \in \mathcal{A}$ soddisfa $tr(T) > 3$ allora T è diagonalizzabile.

d) Mostrare che per ogni $T \in \mathcal{A}$ l'applicazione $T^2 - 2I_3$ è invertibile.

Esercizio 3. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\varphi : M_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$
$$A = (A_{ij}) \mapsto \sum_{i,j} A_{ij}.$$

Indichiamo con E_{ij} le matrici elementari in $M_n(\mathbb{Q})$ e con Λ il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{Q})$ generato dalle matrici $E_{ij} - E_{ij+1}$ per $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n-1$.

a) Determinare una base di $M_n(\mathbb{Q})/\Lambda$.

b) Mostrare che esiste una applicazione lineare $F : M_n(\mathbb{Q})/\Lambda \to \mathbb{Q}$ tale che $F \circ \pi = \varphi$, essendo $\pi : M_n(\mathbb{Q}) \to M_n(\mathbb{Q})/\Lambda$ la proiezione naturale sul quoziente.

Esercizio 4.

a) Mostrare che l'insieme degli endomorfismi autoaggiunti rispetto ad una forma bilineare non degenere β su uno spazio vettoriale V costituisce un sottospazio vettoriale di $End(V)$.

b) Sia $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrare che la forma bilineare β_S su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice S rispetto alla base canonica è un prodotto scalare e determinare una base del sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^2)$ costituito dagli endomorfismi autoaggiunti rispetto a β_S.