

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B -
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 11 Gennaio 2021

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia B la matrice antisimmetrica a coefficienti in \mathbb{Q}

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Dire se esiste, e, in caso affermativo, trovare, una matrice invertibile A tale che

$$A^T B A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

b) Esistono matrici antisimmetriche non nulle di ordine 4 a coefficienti razionali, che non sono congruenti a B ?

Esercizio 2. Sia V di dimensione 4 e $F \in \text{End}(V)$ nilpotente non nulla tale $V = W_1 \oplus W_2$, dove W_1 e W_2 sono F -invarianti e $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$.

a) Determinare il polinomio minimo di F e mostrare che la sua conoscenza non è sufficiente a individuare la forma di Jordan di F .

b) Mostrare che $\dim \text{Ker} F$ determina la forma di Jordan di F e enumerare le differenti possibilità per tale forma di Jordan.

Esercizio 3. Determinare il polinomio minimo e calcolare la forma canonica di Jordan della matrice a blocchi

$$B = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nei due casi $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la forma bilineare su \mathbb{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix},$$

ha sottospazi isotropi di dimensione due? Esistono valori di a per cui la forma è definita positiva?