Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - III appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 17 giugno 2019

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Una matrice quadrata di ordine n con n autovalori distinti è diagonalizzabile.
2. Ogni endomorfismo iniettivo di uno spazio vettoriale V è anche suriettivo.
3. Due sottospazi diversi di $\mathbb{K}^3$ di dimensione due hanno necessariamente intersezione di dimensione uno.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e siano

$$H_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \ : \ x = y, \, x + y + z = a\}, \qquad V_b = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \ : \ x - y + z = b\},$$

$$\mathcal{L}_{a,b} := \{f \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3) \ : \ f(H_a) \subseteq V_b\},$$

e sia $S_a = Span(H_a)$ il sottospazio di $\mathbb{K}^3$ generato dagli elementi di H_a.

a) Stabilire per quali valori di a e b l'insieme $\mathcal{L}_{a,b}$ è un sottospazio di $Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$.

b) Calcolare la dimensione di S_a al variare di $a \in \mathbb{K}$.

c) Per gli a, b determinati al punto a) stabilire se è vero che se $f \in \mathcal{L}_{a,b}$ allora $f(S_a) \subseteq V_b$.

d) Per gli a, b determinati al punto a) calcolare $\dim \mathcal{L}_{a,b}$.

Esercizio 2. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che per ogni vettore $v \in V$ esiste $t \in \mathbb{K}$ tale che i vettori

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v + tv_n$$

sono linearmente dipendenti. Dire inoltre se un tale t è unico.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Si considerino il sottospazio U generato dai due vettori

$$p_1(x) = x^2 + x; \ \ p_2(x) = 2x^2 + 1$$

e, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sottospazio

$$W_k = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \, \text{tali che} \, p(2) = kp(1)\}.$$

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base del sottospazio $U \cap W_k$ di V.

Esercizio 4. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Mostrare che $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A se e solo se è autovalore di A^T.

b) Dimostrare che una matrice quadrata A è diagonalizzabile se e solo se A^T è diagonalizzabile.