Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 11 febbraio 2019

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Se $U, W \subset \mathbb{R}^4$ sono due sottospazi vettoriali di dimensione 3, allora $U \cap W$ contiene almeno due vettori linearmente indipendenti.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ha un autovalore uguale a 0 .

3. Siano $m, n, p > 1$ tre interi. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Se rango$(A) \neq 0$ e rango$(B) \neq 0$ allora rango$(AB) \neq 0$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)?
2. Considerare, per $a \in \mathbb{Q}$, la stessa matrice in $M_3(\mathbb{Q})$. Esistono valori di a per cui essa è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$?

Esercizio 2. Siano $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid x_1 = 0\}$. Sia $f : U \to \mathbb{Q}$ la funzione lineare tale che: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ e sia $g : W \to \mathbb{Q}$ la funzione lineare tale che $g((x_1, x_2, x_3)^t) = x_3$. Esiste una funzione lineare $h : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ la cui restrizione ad U coincida con f e la cui restrizione a W coincida con g?

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{Q}$, siano $U, W \subset V$ due sottospazi, di dimensione m e p rispettivamente, tali che $V = U \oplus W$. Siano $\pi_U, \pi_W \in End(V)$ le proiezioni su U e W associate alla scomposizione in somma diretta. Sia F l'endomorfismo $F = \pi_U - \pi_W$.

1. Calcolare F^2.
2. Chi sono gli autovalori e gli autovettori di F? F è diagonalizzabile?
3. Mostrare, ispirandosi al primo punto dell'esercizio, che un endomorfismo $G \in End(V)$ che soddisfa $G^2 = Id$ è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Siano $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ e $W = Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{Q}^4$.

1. Determinare una base di $U \cap W$.
2. Sia $\mathcal{H} \subset End(\mathbb{Q}^4)$ il sottospazio
$$\mathcal{H} = \{f \in End(\mathbb{Q}^4) \mid f(U) \subseteq U \text{ e } f(W) \subseteq W\}, \tag{1}$$
Determinare $\dim \mathcal{H}$.
3. Mostrare che esiste un vettore $v \in \mathbb{Q}^4$ che è un autovettore per tutti gli endomorfismi $f \in \mathcal{H}$.