Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - IV appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 18 luglio 2019

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Sei matrici quadrate di ordine 2 sono sempre linearmente dipendenti.
2. Siano W_1, W_2, W_3 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V tali che $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3$. Allora $W_2 = W_3$.
3. Sia $A \in M_n(\mathbb{Q})$, $n > 1$, tale che $A^2 = A$. Allora $A = 0$ oppure $A = I_n$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{Q}^4$ e siano

$$Z = Span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad U = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \quad W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ : \ x - t = 0\}.$$

a) Sia $\mathcal{H} = \{f \in End(\mathbb{Q}^4) \mid \ker(f) \supseteq Z, f(U) \subseteq Z, f(W) \subseteq U, Im(f) \subseteq W\}$. Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{Q}^4)$ e determinarne la dimensione.

b) Determinare l'insieme $\{f \in \mathcal{H} \mid f$ è diagonalizzabile$\}$.

Esercizio 2. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Y_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia $A_\alpha = XY_\alpha^T \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Determinare, al variare di α, $\ker A_\alpha$ e ImA_α.

b) Per quali α la matrice A_α è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{K}$,

determinare gli insiemi:

$R_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ esiste un'unica $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f_a(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_a(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$S_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ non esiste alcuna $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

$T_a = \{a \in \mathbb{K} \mid$ esistono infinite $f_a \in Hom(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$ tale che $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 4. Sia $A \in M_3(\mathbb{Q})$ una matrice con polinomio caratteristico $x^2(x-1)$ e molteplicità geometrica di 0 uguale ad uno. Sia $F : M_3(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ definita da $F(X) = AX$.

a) Determinare il polinomio caratteristico di F.

b) Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 per l'applicazione F.