Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 21 gennaio 2019

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Una matrice quadrata è diagonalizzabile solo se ha autovalori distinti.
2. Una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è necessariamente suriettiva.
3. Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori non nulli in $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim Span\{v_1, v_2, v_3\} = 3$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid 2x_1+x_2-x_4 = 0, x_1+x_3 = 0\}$ e $W = Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.
Sia $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4 \mid f(W) \subseteq U\}$.

a) Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{Q}^4)$.

b) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}$.

Esercizio 2. Siano n e r due interi positivi, e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_A : M_{n,r}(\mathbb{K}) \to M_{n,r}(\mathbb{K})$ definita da
$$X \mapsto AX.$$

a) Trovare gli autovalori e gli autovettori di ϕ_A in funzione di quelli di A.

b) Dedurre in particolare che se A è diagonalizzabile allora ϕ_A è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ ($\alpha \in \mathbb{K}$):
$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, 3x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 0\}.$$
Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha $\mathbb{K}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Esercizio 4. Si considerino le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare polinomio caratteristico e autovalori, con relative molteplicità algebrica e geometrica, delle matrici A, B, C.

b) Stabilire quali tra le matrici A, B, C sono simili tra loro.