Es. 1 la matrice annulla il polinomio $x^2 - x = x(x-1)$

Per il teor. cinese dei resti: M è diagonalizzabile con autovalori 0 e 1.

M è simile a $\Delta = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0_{n-l} \end{pmatrix}$ per qualche l.

Poiché $\mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Tr}\, \Delta$ si ha $l = K$.

Cioè $\dim V_1 = K$ $\dim V_0 = n-K$

in particolare K è intero e compreso tra 0 e n ed è uguale al rango.

Es. 2. Per calcolare la matrice di β si deve calcolare:

$\beta(1,1)$, $\beta(1,x)$, $\beta(1,x^2)$

$\beta(x,x)$ $\beta(x,x^2)$ $\beta(x^2,x^2)$.

a) Si trova

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si vede che la segnatura è $+, -, 0$.

b) Il radicale si trova risolv.

$$MX = 0 \Rightarrow X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cioè $\operatorname{rad} \beta = \langle 1 - x^2 \rangle$

(come si poteva vedere immediatamente dal fatto che si annulla in ± 1)

c) Se $p = x + x^2$, $p(1) = 2$

$p(-1) = 0$

quindi

$$W^{\perp} = \{ q : \cancel{2}\, q(-1) = 0 \}$$

Una possibile base è

$\{x+1, \; x^2 + x\}$

Equivalentemente si risolve

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2, -2, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = x_1 + x_3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es. 3 a)

Sia $B \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici triang. superiori: B è un gruppo: se $S, T \in B \Rightarrow ST, S^{-1} \in B$.

Poiché A è triangolabile esiste M invertibile t.c.

$$MAM^{-1} = T \in B$$

Scriviamo $M = SH$ con $S \in B$ e H ortogonale (Gram Schmidt)

$$T = SHAH^{-1}S^{-1} \Leftrightarrow HAH^{-1} = S^{-1}TS \in B.$$

b) H è ortogonale quindi $H^{-1} = H^T$

$$B^T = (HAH^T)^T = HA^TH^T = -HAH^T$$

$= -B$,

essendo antisimmetrica e triang. superiore $\Rightarrow B = 0$

Es. 4

$$\operatorname{Ann} W \cap \operatorname{Ann} U \subseteq \operatorname{Ann}(U + W)$$

Sia $\varphi \in \operatorname{Ann} W \cap \operatorname{Ann}(U)$:

questo vuol dire

$\varphi(w) = 0 \quad \forall w \in W$, 1)
$\varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U$. 2)

Se $u + w$ è un vettore di $U + W$ $\Rightarrow$ $\varphi(u+w) = \underbrace{\varphi(u)}_{\substack{= \\ 0 \text{ per } 2}} + \underbrace{\varphi(w)}_{\substack{= \\ 0 \text{ per } 1}}$

$$\mathrm{Ann}(U+W) \subseteq \mathrm{Ann}(U) \cap \mathrm{Ann}(W)$$

In generale se $U' \subseteq U$

$\Rightarrow \mathrm{Ann}(U) \subseteq \mathrm{Ann}(U')$:

$U \subseteq U+W \Rightarrow \mathrm{Ann}(U+W) \subseteq \mathrm{Ann}(U)$

$W \subseteq U+W \Rightarrow \mathrm{Ann}(U+W) \subseteq \mathrm{Ann}(W)$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Ann}(U+W) \subseteq \mathrm{Ann}(U) \cap \mathrm{Ann}(W)$$