Es. 1. Poiché char $K \neq 2$ F ha 3 autovalori distinti $0, 1, 2$ quindi $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ sia v_0, v_1, v_2 una base di V (con $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$).

Poniamo $v = v_0 + v_1 + v_2$: $F(v) = v_1 + 2v_2$
$F^2(v) = v_1 + 4v_2$. Allora $v, F(v), F^2(v)$ sono una base perché $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ha rango 3.

Se ad esempio $F = I$ questo non accade in quanto $\forall v$, $F(v) = v$, $F^2(v) = v$ etc... e $\mathrm{Span}\{F^a(v)\} = \mathrm{Span}\{v\}$.

b). Se $d = \deg q_F < \dim V = n$ $\Rightarrow \forall r \geq d$ F^r è comb. lin di $I, F, \dots F^{d-1}$

quindi per ogni v, $\forall r \geq d$

$$F^r(v) \in \operatorname{Span}\{v, F(v), \dots F^{d-1}(v)\}.$$

Perciò

$$\dim \operatorname{Span}\{F^\ell(v)\}_{\ell \in \mathbb{N}} \leq d < n = \dim V$$

Esercizio 2.

I determ. dei minori diagonali sono: 1, $1-\alpha^2$, $1-2\alpha^2$.

β_B è degenere per $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se $\alpha^2 < \frac{1}{2}$ la segnatura è $(+,+,+)$

Se $\frac{1}{2} < \alpha^2 < 1$ la seg. è $(++-)$

lo stesso accade quando $\alpha^2 > 1$

Per $\alpha = 1$ si ha β non degenere ma non definita né >0 né <0 perché $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$. Poiché $\det B < 0$ l'unica possibilità è $(+,+,-)$

Esistono vettori isotropi non nulli $\iff$ β non è def. positiva o def. negativa.

quindi per $\alpha^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) la conica ha equazione

$$(x \ y \ 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Per $\alpha^2 < \frac{1}{2}$ si ha una conica del tipo $x^2 + y^2 + 1 = 0$ quindi senza pti reali

Per $\alpha^2 = \frac{1}{2}$ si ha una

conica del tipo $x^2 + y^2 = 0$

quindi degenere con un solo

pto reale

Per $\frac{1}{2} < \alpha^2 < 1$ si ha

$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} > 0$ ma $\det\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} < 0$

quindi una conica del tipo

$x^2 + y^2 - 1 = 0$, che è un'ellisse con

punti reali.

Per $\alpha^2 = 1$ si annulla $\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$

ma la conica è non degenere $\Rightarrow$

parabola.

Per $\alpha^2 > 1$ $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} < 0$

quindi si ha un'iperbole.

<u>Es. 3</u> Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $A = M_{\mathcal{B}}(F)$, allora rispetto a una opportuna base $\mathcal{B}'$ di $End(V)$ costituita a partire da $\mathcal{B}$, si ha

$$M_{\mathcal{B}'}(L_F) = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} \in M_{n^2}(\mathbb{K})$$

è a questo punto facile vedere che un polinomio annulla A

$\iff$ annulla $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Alternativamente: osserviamo che

$L_F^K(X) = F^K \circ X$. Quindi se

$p(t) \in \mathbb{K}[t]$ si ha

$$p(L_F)(X) = p(F) \circ X.$$

Se $p(F) = 0 \implies$

$p(L_F) = 0$. Viceversa se

$p(L_F) \circ X = 0 \quad \forall X \implies$

(prendendo $X = Id$) $p(F) = 0$

quindi gli ideali

$$\{p : p(L_F)=0\} = \{p : p(F)=0\}$$

coincidono.

<u>Es. 4</u> il punto b) contiene il punto A come caso particolare

l'endomorfismo soddisfa $F^p = I$

e il polinomio caratteristico è

$$x^p - 1 = (x-1)(1+x+\ldots+x^{p-1})$$

che ha come radici le radici p.me di 1.

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Queste sono distinte

$\Rightarrow$ diagonalizz. per ogni p

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se $p = 2$ queste sono reali, quindi F è diag. su $\mathbb{R}$.

se $p \neq 2$, ci sono radici p-me non reali quindi non è diag. su $\mathbb{R}$.

Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica p

$x^p - 1 = (x-1)^p$ quindi F ha

solo l'autovalore 1 con molt. alg $= p$.

Quindi F non è diagonalizz., essendo $F \neq I$. Poiché $\dim \operatorname{Ker}(F - I) = 1$, la forma di Jordan è

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$