Esercizio 1

a) Poiché $\det S = -1$ la forma è non degenere

b) Un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ è isotropo sse

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = 2xz + y^2 = 0$$

l'insieme di tali vettori non è uno sp. vett.: ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono isotropi ma le loro somma non lo è.

c) la forma quadratica $2xz + y^2 = 0$ può scriversi $\frac{1}{2}(x+z)^2 - \frac{1}{2}(x-z)^2 + y^2 = 0$.

quindi sul ssv. di dim 2 di equazione $x = z$ vediamo una forma def. positiva.

Esercizio 2

Se $\operatorname{char} K \neq 2$ $\quad 1 \neq -1$

quindi $V = \operatorname{Ker}(F-I)^2 \oplus \operatorname{Ker}(F+I)^2$.

Segue che le possibili classi hanno matrice di Jordan $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

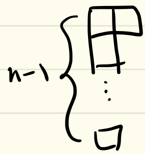
Se $\operatorname{char} K = 2$ il pol. caratteristico è $(x-1)^3$ quindi le classi hanno matrice di Jordan $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3

La matrice ha rango 1 quindi $\dim \operatorname{Ker} U = n-1$. Perciò il pol. caratteristico è divisibile per λ^{n-1}, cioè della forma $\lambda^n - a\lambda^{n-1}$, e $a = \operatorname{Tr} U = n$

$$\Rightarrow \; p_U(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - n).$$

Il vettore $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ è un autovettore di autovalore n, e $n \neq 0$ se $\operatorname{char} K$ non divide n. Quindi in questo caso U è diagonalizzabile e il pol. minimo è $\lambda(\lambda - n)$.

Se $\operatorname{char} K$ divide n il pol. caratter. $= \lambda^n \Rightarrow U$ è nilpotente con $\operatorname{Ker} U$ di dim $n-1 \Rightarrow$ 

e il pol. min $= \lambda^2$

<u>Esercizio 4</u> a) In generale si ha $p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda)$

Se A verifica $-A = A^T$

$$p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det(-A - \lambda I)$$

$$= (-1)^n \det(A + \lambda I) = (-1)^n \det(A - (-\lambda) I)$$

$$= (-1)^n p_A(-\lambda).$$

b) Sia λ_0 un autovalore compl. di A, x_0 un relativo autovettore: $Ax_0 = \lambda x_0$.

Poiché A ha coeff. reali $A\overline{x}_0 = \overline{\lambda}\,\overline{x}_0$

Consideriamo lo scalare $\overline{x}_0^T A x_0 = (\overline{x}_0^T A x_0)^T$

$= x_0^T A^T \overline{x}_0$. Si ha

$\overline{x}_0^T A x_0 = \lambda_0 \overline{x}_0^T x_0$, mentre

$x_0^T A^T \overline{x}_0 = - x_0^T A \overline{x}_0 = - \overline{\lambda}_0 x_0^T \overline{x}_0$

$0 = (\lambda_0 + \overline{\lambda}_0)\, \overline{x}_0^T x_0$ ma $\overline{x}_0^T x_0 = x_0^T \overline{x}_0 \neq 0$.

quindi $\lambda_0 = -\overline{\lambda}_0 \Rightarrow \lambda_0$ è immaginario puro.