Quesiti preliminari:

1) Vero: Se $f: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$,

$\operatorname{Im} f$ è un ssv di $\mathbb{K}$ quindi ha dim $= 0$ o $= 1$: $\dim \operatorname{Im} f = 0 \iff f = 0$

Ma $\dim \operatorname{Im} f = 1 \iff \operatorname{Im} f = \mathbb{K}$ cioè f suriettiva

2) Vero: le matrici E_{ij} formano una base di $M_{m,n}(\mathbb{K})$ e, avendo una sola riga non nulla, hanno rango 1

3) Falso, es. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sono lin. dip in $\mathbb{K}^2$ ma non sono multipli a due a due

<u>Es. 1</u> La riduzione di Gauss di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mostra che se $a \neq 5$

v_1, v_2, v_3 sono LIN IND $\Rightarrow$ una base.

Poiché si può prescrivere arbitrariamente il valore di una funzione lineare su una base, $R_a = \{ a \in \mathbb{K} : a \neq 5 \}$.

Se $a=5$ si ha la dip. lineare

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi una f lineare verifica

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 3 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

pertanto $S_a = \{5\}$, e $T_a = \{5\}$

poiché in quest'ultimo caso la condizione $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ segue dalle prime due; completando $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a una base, es aggiungendo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_3'$ per ogni $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ $\exists! f$

t.c. $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(v_3) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

quindi esistono infinite applicazioni che verificano le condizioni $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 2. Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

quindi $U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ che sono

LIN IND $\Rightarrow \dim U = 2$

Quanto a V, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$R_2 - R_1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $3 \neq 0$ si trova $t = 0$ $\quad x - y + z = 0$

$\dim V = 2$ e una base è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si ha soltanto un'equazione

$$x - y + z + t = 0.$$

$\dim V = 3$, una base è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Determiniamo $U \cap V$ se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

un generico vettore di U è

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$ Sostituendo nelle equazioni che definiscono V.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \cancel{\lambda_2} + \cancel{\lambda_2} = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases}$$ che ha sol. $\lambda_1 = 0$

Quindi $U \cap V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sostituendo si trova un'equazione identicamente soddisfatta

$\Rightarrow U \subseteq V$ e $U \cap V = U$. $\# U \cap V = 9$

Es. 3. Osserviamo che $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in C$

quindi $\underset{\overset{\parallel}{\mathbb{K}^3}}{\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}} \subseteq \mathrm{Span}\, C$

quindi $\mathrm{Span}\, C = \mathbb{K}^3$.

Dalla linearità di f segue che

$$f(C) \subseteq S \iff f(\mathrm{Span}\, C) \subseteq S.$$

Quindi $\mathcal{H} = \{ f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) : \mathrm{Im} f \subseteq S \}$

Poniamo $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e sia $\{v_1, v_2, v_3\} = B_V$ un completamento

$$f \in \mathcal{H} \iff M^{B_V}_{B_V}(f) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{H} = 3$ (la verifica che $\mathcal{H}$ è un ssv è standard).

Poiché ogni $f \in \mathcal{H}$ ha rango ≤ 1 non esistono funzioni suriettive in $\mathcal{H}$.