Quesiti Preliminari

1) Vero: ogni autovalore deve avere molteplicità algebrica e geom. $= 1$

Quindi se $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono gli autovalori esistono $v_1, \dots v_n$: $Av_i = \lambda_i v_i$ $v_i \neq 0$.

Poiché corrispondono ad autovalori distinti sono lin. indipendenti.

2) Vero: $f: V \to V$. Se è iniettivo $\ker f = \{0\}$. $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$ cioè è suriettivo.

3) Vero: Siano H_1, H_2 i due sottospaz.

$0 \leq \dim(H_1 \cap H_2) \leq 2$. Ma $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$ se e solo se $H_1 = H_2$ che non è per ipotesi.

se $\dim(H_1 \cap H_2) = 0 \Rightarrow$ Grassmann dà $\dim(H_1 + H_2) = 4$ e non può essere perché $H_1 + H_2 \subseteq \mathbb{K}^3$. $\Rightarrow \dim(\ ) = 1$

Esercizio 1.

a) Se $b \neq 0$ l'applicazione nulla non appartiene a $\mathcal{L}_{a,b}$ che quindi non è un sottospazio. Se $b=0$ V_b è un sottospazio e $\mathcal{L}_{a,b}$ è un ssv di $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$, (verifica solita vedi compiti prec.)

b) Se $a=0$ H_0 è un ssv quindi $S_0 = H_0$, di dimensione 1.

Se $a \neq 0$ H_a non è un ssv:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in H_a$ quindi

$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \subseteq S_a$. D'altra parte il vettore generico si scrive $\begin{pmatrix} x \\ x \\ a-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

quindi $H_a = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ che ha dim 2

perché i due vettori sono lin. ind.

VERO:

c) Per a) assumiamo $b=0$

Se $f(H_a) \subseteq V_0$, in particolare

$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}\right) \in V_0$ $\quad f\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in V_0$.

Se $v \in S_a \Rightarrow v$ è comb. lin

di $\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ quindi $f(v) \in V_0$

perché V_0 è ssv.

d) Siamo ricondotti a determinare

$\dim \{ f : f(S_a) \subseteq V_0 \} = \mathcal{L}_{a,0}$

se $a=0$ $\quad \dim S_0 = 1$

$a \neq 0$ $\quad \dim S_a = 2$

mentre V_0 ha dim 2.

Si prende una base $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ ottenuta completando una base $\{w_1, w_2\}$ di V_0.

Una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ t.c.

1) Se $a=0$ v_1 è una base di S_0 poi completata

2) Se $a \neq 0$ v_1, v_2 è una base di S_a poi completata

Se $a=0$ $f \in \mathcal{L}_{0,0} \Leftrightarrow$

$$M^{B'}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{dim } 8$$

$a \neq 0$ $f \in \mathcal{L}_{a,0} \Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$

dim $= 7$.

2) poichè $v_1 \dots v_n$ è una base, $v_1 \dots v_{n-1}$ sono lin. ind.

quindi

$v_1 \dots v_{n-1}, v + t v_n$ è lin. dipend

$$\Updownarrow$$

$$v + t v_n \in \mathrm{Span}\{v_1 \dots v_{n-1}\}.$$

v si scrive in modo unico

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ quindi

$v + t v_n = x_1 v_1 + \dots + x_{n-1} v_{n-1} + (x_n + t) v_n$

che $\in \mathrm{Span}\{v_1 \dots v_{n-1}\} \iff t = -x_n.$

quindi è vero e t è unico

3) Un vettore generico di U si scrive $a(x^2+x)+b(2x^2+1)=p(x)$.

$p(2)=6a+9b \quad p(1)=2a+3b$.

$$U \cap W_k = \{ a(x^2+x)+b(2x^2+1) : (6a+9b)=k(2a+3b) \}.$$

Cioè $(6-2k)a+(9-3k)b=0$

$(3-k)2a+(3-k)3b=0$

$(3-k)(2a+3b)=0$

per $k \neq 3$ questo ha dim 1

una base è ($a=-3 \quad b=+2$)

x^2-3x+2 (indip. da k perché $p(2)=p(1)=0$)

per $k=3$ si ha

$U \subseteq W_k$ quindi $U \cap W_k$

ha dim 2. Base $\{x^2+x, 2x^2+1\}$

4) 1° metodo

Se A è diag

$\Rightarrow A = C\Delta C^{-1}$ con C inv.

e Δ diagonale

$A^T = (C^{-1})^T \Delta^T C^T$

$= (C^T)^{-1} \Delta C^T$ quindi A^T

è simile a una matrice diagonale

2ndo metodo (più lungo)

Osserviamo che se B

è una matrice quadrata $n \times n$

$\dim\{x : Bx = 0\} = \dim\{x : B^T x = 0\}$

in quanto rango per righe (B)

$\shortparallel$

rango per colonne (B)

$\shortparallel$

rango per righe (B^T)

e la dim dello spazio delle

soluzioni è n − rango per righe.

$\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T)$

$= \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$

quindi A e A^T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
Siano $\lambda_1 \dots \lambda_k$ gli autovalori di molt. alg. $\mu_1 \dots \mu_k$ (la stessa per A e A^T).

Poichè A è diag.

$$\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)) = \mu_i \quad \forall i=1..k$$

ma, per l'osservazione iniziale,

$$\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)) = \dim \operatorname{Ker}((A-\lambda I)^T)$$

$$= \dim \operatorname{Ker}(A^T - \lambda I)$$ quindi

anche per A^T molt. alg. e geom.

coincidono. Quindi A^T è diagonalizzabile.

Se A^T è diagonalizzabile applicando quanto appena visto $(A^T)^T = A$ lo è