Domande preliminari

1) VERO $U+W \subseteq \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow \dim(U+W) \leq 4$. Per Grassmann

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$
$$\geq 3 + 3 - 4 \geq 2.$$

$\dim U \cap W \geq 2 \iff U \cap W$ contiene almeno due vett. lin. ind

2) VERO $\operatorname{rk} A = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = 2$

$\operatorname{Ker} A$ è l'autosp. di autovalore 0

3) FALSO una matrice A ha rango $\neq 0$ $\iff A \neq 0$. Quindi la frase equivale a prodotto di matr. $\neq 0$ è $\neq 0$:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $AB = 0$

Ex. 3

1) Se $u \in U$ $f(u) = u$ i.e. $U \subseteq V_1$

se $w \in W$ $f(w) = -w$ $W \subseteq V_{-1}$

ma $V = U \oplus W$ quindi non ci sono altri autovalori e altri autovettori, e la funzione è diagonalizzabile

2) $\pi_U^2 = \pi_U$, $\pi_W^2 = \pi_W$ $\pi_U \pi_W = 0$

$\Rightarrow f^2 = Id.$

3) Preso $v \in V$ scriviamo (siamo in $\mathbb{Q}$, $2 \neq 0$!)

$$v = \frac{1}{2}(v - g(v)) + \frac{1}{2}(v + g(v)).$$

Usando $g^2 = Id$:

$$g\left(\tfrac{1}{2}(v - g(v))\right) = -\tfrac{1}{2}(v - g(v))$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}(v + g(v))\right) = \tfrac{1}{2}(v + g(v))$$

i.e. $\tfrac{1}{2}(v - g(v)) \in V_{-1}$

$\tfrac{1}{2}(v + g(v)) \in V_1$.

$\Rightarrow \quad V = V_{-1} \oplus V_1$.

<u>Ex. 1</u>. Pol. caratteristico

$$-\lambda\left(\lambda^2 - (1+a)\lambda + (a-1)\right).$$

$$\Delta^2 = (1+a)^2 - 4a + 4 = (1-a)^2 + 4 > 0.$$

autov. $\left(0, \dfrac{a+1 \pm \sqrt{(1-a)^2+4}}{2}\right)$

Se $a+1 \pm \sqrt{(1-a)^2+4} \neq 0$
ci sono 3 autovalori distinti
$\Rightarrow$ diag.

$a+1 \pm \sqrt{(1-a)^2+4} = 0$ si verifica
solo per $a=1$

in tal caso
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1 quindi

$\dim V_0 = 2 =$ molt. alg. 0.
$\Rightarrow$ diag. con autovalori
0 (molt. 2) e 2 molt. (1)

3) Quest'ultimo caso, $a=1$ ha
autovalori $0, 2 \in \mathbb{Q}$ quindi la
matrice è diagonalizz. in $\mathbb{Q}$.

Ex. 3. $U+W=\mathbb{R}^3$.

$\dim U\cap W = 1 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

la h cercata esiste $\Longleftrightarrow$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ quindi}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -1.$$

Quindi h esiste. e, poiché $U+W=\mathbb{R}^3$ è unica.

Ex. 4.

le eq. cartesiane di W sono

$y = z \quad z = t$. Risolvendo

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$U \cap W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1.$$

$(\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4)$

Completiamo v_1 a una base

di U : $B_U = \{v_1, v_2, v_3\}$

e completiamo a una base di W

$B_W = \{v_1, v_4\}$. Allora

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^4$

Se $f \in \mathcal{H}$, allora

$f(v_1) \in U \cap W$ perché

$v_1 \in U$ quindi $f(v_1) \in U$ ma

$v_1 \in W$ – – $f(v_1) \in W$.

Poiché $U \cap W = \mathrm{Span}\{v_1\}$

$f(v_1) = a_{11} v_1$ (i.e. v_1

è autovettore di ogni $f \in \mathcal{H}$

questo risolve l'ultimo punto)

$f \in \mathcal{H} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathcal{H} = 9.$$