Quesiti preliminari.

1) FALSO. Ad esempio la matrice nulla non ha autovalori distinti ma è diagonalizzabile, anzi, diagonale

2) FALSO, es. l'applicazione $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ non è suriettiva

3) FALSO. Ad esempio, se $v_1 \neq 0$ $v_2 = 2v_1$ $v_3 = 3v_1$ sono non nulli ma $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione 1

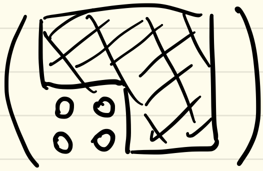
Ex. 1.

U e W hanno dim 2

$\{v_1, v_2\}$ base di W. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathcal{B}_1$ base di $\mathbb{Q}^4$ ottenuta completando

$\{v_1', v_2'\}$ base di U. $\{v_1', v_2', v_3', v_4'\} = \mathcal{B}_2$ base di $\mathbb{Q}^4$ ottenuta compl.

$f \in \mathcal{H} \iff M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ ha la forma



quindi $\dim \mathcal{H} = 4 \times 4 - 4 = 12$

Ex. 2

Consideriamo $X = (X_1, \dots X_r)$

con $X_i \in \mathbb{K}^n$ le colonne di X.

Allora

$$AX = (AX_1, \dots, AX_r)$$

AX_i = i-ma colonna di AX.

$AX = \lambda X$ se e solo se $AX_1 = \lambda X_1 \dots AX_r = \lambda X_r$

Perciò affinché X sia autovettore di φ_A le sue colonne devono essere autovettori di A e a lo stesso autovalore.

Quindi

- gli autovalori di Φ_A sono gli autovalori di A,
- La molteplicità geometrica di λ come autovalore di Φ_A è r volte la molt. geom. di λ come autovalore di A.

2) Se A è diagon. $\Rightarrow$

$$n = \sum_{\lambda_i \text{ autovalore}} \text{molt. geom}(\lambda_i)$$

come autovalore di A

$$\underset{\dim M_{n,r}(K)}{\overset{\parallel}{rn}} = \sum_{\lambda_i \text{ autov}} r \underbrace{\text{molt. geom}(\lambda_i)}$$

molt. geom(λ_i) come autov. di Φ_A

pertanto Φ_A è diagonalizz.

Esercizio 3

V_1 e V_2 hanno dim 2 in quanto

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & \alpha & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ hanno rango 2.

$$\mathbb{K}^4 = V_1 \oplus V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{0\} \iff$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & \alpha & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

Riducendo a scala si vede che questo accade se e solo se $\alpha \neq -1$.

Es. 4

A, B, C hanno pol. caratteristico $-\lambda^3$ quindi 0 è l'unico autovalore, con molt. algebrica 3. la molt. geom. è

$\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \text{rango } A = 1$
$\dim \operatorname{Ker} B = 3 - \text{rango } B = 1$
$\dim \operatorname{Ker} C = 3 - \text{rango } C = 2$

Quindi C non è simile né ad A né a B.
A e B sono simili:
se $\mathcal{B} = \{ V_2, V_3, V_1 \}$, la matrice di L_A è B.