Es 1. 1) f soddisfa $f^2(f-3I)=0$

Quindi il polinomio minimo $q_f(x)$ di f divide $x^2(x-3)$.

Se $q_f(x) = x$, o $x(x-3)$, o $(x-3)$

$\Rightarrow$ f è diagonalizzabile

(quindi anche f^2)

Se $q_f(x) = x^2$ o $x^2(x-3)$ $\Rightarrow$

f non è diagonalizzabile ma il suo blocco di Jordan ha lunghezza 2, quindi quello di f^2, relativo a 0, ha lunghezza uno, e f^2 è diagonalizzabile ($f^2=0$ se $q_f(x)=x^2$

f^2 simile a $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$ se $q_f(x)=x^2(x-3)$)

2) Dalla discussione precedente segue che:

Se f è diag. f è simile a una di queste matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

altrimenti: ad una di queste $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

<u>Es. 2</u>. 1) $\det A = -5$ quindi se $\operatorname{car} K \neq 5$ β è non degenere

2) No, non esiste in quanto $\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} > 0$ mentre $\det A < 0$.

3) Prendiamo $v_1 = e_1$

$$\{v_1\}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

quindi possiamo prendere $V_2 = e_3$

$$\left(\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}\right)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è

una base ortogonale.

Esercizio 3: 1) Per il teorema cinese dei resti f è diagonalizzabile

Se $f = 2I$ o $f = 3I$
allora ogni sottospazio è invariante.

Altrimenti $V = V_2 \oplus V_3$ e uno dei

due autospazi ha dimensione due.

Supponiamo ad esempio $\dim V_2 = 2$
(discorso identico nell'altro caso).

Per ogni $W \subseteq V_2$ è un ssv di dim 1

$\Rightarrow$ $W + V_3$ ha dimensione due ed

è invariante.

2) Sì: basta prendere un prodotto scalare risp. cui V_2 e V_3 sono ortogonali.

Es. 4.

1) Si osserva prima di tutto che $W \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Se $[v] \in \mathbb{R}^4/W$ definisco $\hat{f}([v]) = f(v)$; Controlliamo che è ben definita:

$[v] = [v']$ se e solo se $v' = v + a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$; ma allora $f(v') = f(v)$.

$\hat{f}$ verifica le proprietà richiesta.

2) $\operatorname{Ker} \hat{f} = \operatorname{Ker} f / W$ quindi $\dim = 1$