Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - II appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 17 febbraio 2020
Tema 1

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ due matrici diagonalizzabili tali che A^2 sia simile a B^2. Allora A e B sono simili.
2. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$, $B \neq 0$, tale che $AB = 0$ se e solo se esiste $C \in M_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, tale che $CA = 0$.
3. Ogni matrice è combinazione lineare di matrici di rango 1.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $C = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ e $S = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Mostrare che l'insieme

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,|\, f(C) \subseteq S\}$$

è un sottospazio vettoriale di $Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2. Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) Mostrare che f è iniettiva se e solo se esiste una applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = Id_V$.

b) È vero che se f è iniettiva allora esiste una applicazione lineare $h : W \to V$ tale che $f \circ h = Id_W$?

Esercizio 3. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ due matrici con lo stesso rango. Siano

$$\mathcal{X}_A = \{X \in M_{n,r}(\mathbb{K}) \,|\, AX = 0\};$$

$$\mathcal{X}_B = \{X \in M_{n,r}(\mathbb{K}) \,|\, BX = 0\}.$$

Mostrare che $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{X}_B$ sono sottospazi vettoriali di $M_{n,r}(\mathbb{K})$ e che sono isomorfi.

Esercizio 4. Si consideri la seguente matrice in $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ la matrice A è diagonalizzabile?

b) Per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ la matrice A^{-1} è diagonalizzabile?

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - II appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 17 febbraio 2020
Tema 2

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Se I, J sono sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V tali che $I \subsetneq J$ allora $\operatorname{Span} I \subsetneq \operatorname{Span} J$.
2. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$, $B \neq 0$, tale che $AB = 0$ se e solo se esiste $C \in M_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, tale che $CA = 0$.
3. Ci sono infiniti sottospazi vettoriali in $\mathbb{Q}^2$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $C = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ e $S = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Mostrare che l'insieme

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,|\, f(C) \subseteq S\}$$

è un sottospazio vettoriale di $Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2. Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) Mostrare che f è iniettiva se e solo se esiste una applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = Id_V$.

b) È vero che se f è iniettiva allora esiste una applicazione lineare $h : W \to V$ tale che $f \circ h = Id_W$?

Esercizio 3. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ due matrici con lo stesso rango. Siano

$$\mathcal{X}_A = \{X \in M_{n,r}(\mathbb{K}) \,|\, AX = 0\};$$

$$\mathcal{X}_B = \{X \in M_{n,r}(\mathbb{K}) \,|\, BX = 0\}.$$

Mostrare che $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{X}_B$ sono sottospazi vettoriali di $M_{n,r}(\mathbb{K})$ e che sono isomorfi.

Esercizio 4. Si consideri la seguente matrice in $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ la matrice A è diagonalizzabile?

b) Per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ la matrice A^{-1} è diagonalizzabile?