Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 27 gennaio 2020
Tema 1

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Un'applicazione lineare non nulla $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^3$ è iniettiva.
2. Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente dipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, allora esistono λ e σ in $\mathbb{K}$ tali che $v_1 = \lambda v_2 = \sigma v_3$.
3. Una matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se ha due autovalori distinti.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione 4, W_1 e W_2 due suoi sottospazi di dimensione 2 tali che $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Si considerino poi i seguenti sottospazi di $\mathrm{End}(V)$:

$$U_1 = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(W_1) \subseteq W_2\}, \quad U_2 = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(W_2) \subseteq W_1\}.$$

Calcolare la dimensione di $U_1 + U_2$.

Esercizio 2. Mostrare che se $f \in \mathrm{End}(V)$ è un endomorfismo non nullo di uno spazio vettoriale V tale che $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \ker(f)$ allora f non è diagonalizzabile. È vero, viceversa, che se f non è diagonalizzabile allora $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \ker(f)$?

Esercizio 3. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n tale che $f^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ (f nilpotente). Sia $W_i = Im(f^i)$.

(a) Mostrare che se $W_i \neq 0$ si ha $\dim(W_{i+1}) < \dim(W_i)$.

(b) Mostrare che $f^n = 0$.

(c) Mostrare che se λ è autovalore di f allora $\lambda = 0$.

(d) Determinare gli endomorfismi nilpotenti di V diagonalizzabili.

(e) Costruire un esempio di endomorfismo nilpotente di $\mathbb{K}^3$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^4$:

$$U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} \quad V = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0,\ x - y + z - 2t = 0\}.$$

(a) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

(b) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) Quanti elementi ha il sottospazio $U \cap V$ se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

(d) Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ descrivere $U \cap V$ mediante un sistema di equazioni lineari.

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 27 gennaio 2020
Tema 2

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Un'applicazione lineare non nulla $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ è suriettiva.
2. In uno spazio vettoriale V la somma di due sottospazi vettoriali distinti di dimensione 1 è diretta.
3. Una matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ con due autovalori uguali è necessariamente diagonalizzabile.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione 4, W_1 e W_2 due suoi sottospazi di dimensione 2 tali che $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Si considerino poi i seguenti sottospazi di $\mathrm{End}(V)$:

$$U_1 = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(W_1) \subseteq W_2\}, \quad U_2 = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f(W_2) \subseteq W_1\}.$$

Calcolare la dimensione di $U_1 + U_2$.

Esercizio 2. Mostrare che se $f \in \mathrm{End}(V)$ è un endomorfismo non nullo di uno spazio vettoriale V tale che $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \ker(f)$ allora f non è diagonalizzabile. È vero, viceversa, che se f non è diagonalizzabile allora $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \ker(f)$?

Esercizio 3. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n tale che $f^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ (f nilpotente). Sia $W_i = Im(f^i)$.

(a) Mostrare che se $W_i \neq 0$ si ha $\dim(W_{i+1}) < \dim(W_i)$.

(b) Mostrare che $f^n = 0$.

(c) Mostrare che se λ è autovalore di f allora $\lambda = 0$.

(d) Determinare gli endomorfismi nilpotenti di V diagonalizzabili.

(e) Costruire un esempio di endomorfismo nilpotente di $\mathbb{K}^3$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^4$:

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0,\ x - y + z - t = 0\}.$$

(a) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

(b) Calcolare la dimensione dei sottospazi U, V, $U \cap V$, esibendo una base per ciascuno di essi, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Quanti elementi ha il sottospazio $U \cap V$ se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(d) Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ descrivere $U \cap V$ mediante un sistema di equazioni lineari.