Domande preliminari:

1) $f \neq 0$, $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^3$ è iniettiva: VERO

$\ker f \subseteq \mathbb{K}$ quindi può avere dim 0 o 1.

ma se $\dim \ker f = 1 \Rightarrow \ker f = \mathbb{K}$ e $f = 0$

2) FALSO: es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono dipendenti in $\mathbb{K}^2$ ma nessuno è multiplo di un altro

3) FALSO: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{K}$ è diagonalizz. (anzi diagonale) ma non ha autovalori distinti.

ES1 Sia v_1 base di $W_1 \cap W_2$.

Scegliamo v_2 t.c. $\{v_1, v_2\}$ sia base di W_1

v_3 t.c. $\{v_1, v_3\}$ .... W_2

completiamo a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base $\mathcal{B}$ di V

$$f \in U_1 \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$f \in U_2 \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

$f \in U_1 + U_2$ sse $M_B(f)$ si può scrivere come somma di una matrice della forma (1) e una della forma (2). In questo modo si ottengono tutte e sole le matrici di forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U_1+U_2)=15$

Es. 2. a) $Im(f) \subseteq Ker(f)$ sse $f^2=0$.

Sia v un autovettore di f di autovalore λ: $f(v)=\lambda v$. Allora $0=f^2(v)=\lambda^2 v$; poiché $v\neq 0$ per def. si ha $\lambda=0$

Tale f ha quindi come unico autovalore 0. Se è diagonalizzabile la sua matrice rispetto a una base di autovettori è la matrice nulla. Questo implica $f=0$ contro l'ipotesi.

b) il viceversa non è vero. Es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o un qualsiasi endo invertibile non diag.

ES. 3 oss. Sia F nilpotente su V.

$\Rightarrow \operatorname{Ker} F \neq \{0\}$, altrimenti F sarebbe un isomorfismo e anche F^k lo sarebbe contro l'ipotesi che $F^k = 0$.

Oss. che $W_{i+1} = \operatorname{Im}(f_{|W_i})$.

1)

$f_{|W_i}$ è nilpotente e l'osservazione precedente mostra che $\operatorname{Im}(f_{|W_i}) < \dim W_i$

quindi $\dim W_{i+1} < \dim W_i$.

2) da $\dim W_{i+1} < \dim W_i < \dots$

segue che al più dopo n passi $\dim W_n = 0$

3) se $f(v) = \lambda v \Rightarrow 0 = f^k(v) = \lambda^k v$.

Poiché $v \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$

4) Per il p.to precedente questi hanno il solo autovalore 0 $\Rightarrow$ solo l'end. nullo

e) Esempio di endom. nilpot ($\neq 0$!) in $\mathbb{K}^3$: L_A con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ES. 4 a) In U si osserva che il primo vettore è la somma degli altri quindi $\dim U = 2$. Per V $rk \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

quindi $\dim V = 2$. Preso un vettore generico $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -a \end{pmatrix} \in U$ questo appartiene a V sse soddisfa le equazioni che definiscono V. Si trova, sostituendo, $a = 0$

quindi $U \cap V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ha dim 1

b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ le due equazioni di V coincidono in quanto $-2 = 1$ in $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

quindi $\dim V = 3$ e i vettori

di U soddisfano sempre l'equazione

che definisce V. Cioè $U \subseteq V$

e $\dim U \cap V = 2$.

c) Per il punto precedente $U \cap V$ ha

dimensione 2 su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ quindi ha

$3^2 = 9$ elementi

d) $U \cap V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Un insieme

di equazioni è $\begin{cases} x_1 = 0, \ x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$