Quesiti preliminari:

1) Siano A, B t.c. $A^2 \sim B^2 \Rightarrow A \sim B$

FALSO: es. $A = I \quad B = -I$

(in char $\neq 2$)

2) Se $A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \exists B \neq 0$ t.c. $AB = 0$

$\Updownarrow$

$\exists C \neq 0$ t.c. $CA = 0$

VERO: $AB = 0$ sse $\mathrm{Im} B \subseteq \mathrm{Ker} A$ Quindi

$\exists B \neq 0$ t.c. $AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} A \neq \{0\}$.

$\Leftrightarrow \mathrm{Im} A \subsetneq \mathbb{K}^n$

Ma $\exists C$ t.c. $CA = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} A \subseteq \mathrm{Ker} C$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im} A \subsetneq \mathbb{K}^n$.

3) Ogni matrice è comb. lin. di matrici di rango 1

<u>VERO</u>: Se E_{ij} è la matrice con 1 al posto i,j

0 altrove $\Rightarrow \{E_{ij}\}$ è una base,
e le E_{ij} hanno rango 1.

1b) $I, J \subseteq V \quad I \subsetneq J \Rightarrow \operatorname{Span} I \subsetneq \operatorname{Span} J$

Falso, es. sia $v \neq 0$, $I = \{v\}$, $J = \{v, 0\}$
$I \subsetneq J \quad \operatorname{Span} I = \operatorname{Span} J$

3b) Ci sono infiniti ssv in $\mathbb{Q}^2$
VERO: $\forall a \in \mathbb{Q} \quad V_a := \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right\}$

i V_a sono distinti e in corr 1-1
con $\mathbb{Q}$.

Es. 1

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \right\}$$

$$S = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathcal{H} := \left\{ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f(C) \subseteq S \right\}$$

è un ssv di dim ...

$f(C) \subseteq S$ è un ssv:

Siano $f, g \in \mathcal{H}$, cosicché

$\forall v \in C \quad f(v) \in S$ e $g(v) \in S$

$\Rightarrow \lambda f(v) \in S$ e $f(v)+g(v) \in S$

perché S è ssv.

La dim di $\mathcal{H}$:

$$f(C) \subseteq S \iff f(\operatorname{Span} C) \subseteq S$$

C contiene $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ che è

una base quindi $\operatorname{Span} C = \mathbb{R}^3$.

Perciò $\mathcal{H} = \left\{ f : \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Presa una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$

e $\mathcal{B}' = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \; w_2, w_3 \right\}$ di $\mathbb{R}^3$

$$f \in \mathcal{H} \iff M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{H} = 3.$

Esercizio 2 :

a) Se $g \circ f = I$ allora f è iniettiva

(se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_2$
$= y$

Viceversa sia f iniettiva, e $v_1 \dots v_n$ base di V. Allora $f(v_1), \dots f(v_n)$ sono lin. ind

$$\underset{w_1}{\overset{\shortparallel}{f(v_1)}}, \dots \underset{w_n}{\overset{\shortparallel}{f(v_n)}}$$

Estendiamo a una base $\{w_1 \dots w_n, w_{n+1} \dots w_N\}$

Possiamo definire $g(w_1) = v_1 \dots g(w_n) = v_n$, e $g(w_{n+1}), \dots g(w_N)$ arbitrariamente. $\Rightarrow g \circ f = I$

b) No non è vero: Es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tc

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è iniettiva. Ma per ogni $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \circ h$ ha rango 1.

Es. 3 Basta dimostrare che

$\dim X_A = \dim X_B$.

$X \in X_A$ sse tutte le sue colonne sono contenute nel nucleo di A.

Quindi $\dim X_A = r \dim \operatorname{Ker} A$

Analogamente $\dim X_B = r \dim \operatorname{Ker} B$

ma se rango A = rango $B \Rightarrow$

$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} B$

<u>Es. 4</u> Il pol. caratteristico

è $(\lambda-2)^2(1-\lambda)$

$\mu_a(1) = 1 = \mu_g(1) \quad \forall a, b$

$\mu_a(2) = 2$ e $\mu_g(2) = 2$

$\iff a = 0$

come si vede

calcolando il rango di

$$\begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

Se $A = H \Delta H^{-1}$ $\quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = H \Delta^{-1} H^{-1}$: