Domande preliminari:

1) <u>VERO</u> $W_1 \cap W_2$ è uno sp. vett. su $\mathbb{Z}/_2$. Se $K = \dim W_1 \cap W_2$

$\# W_1 \cap W_2 = 2^K$ che è dispari $\Leftrightarrow K = 0$ cioè $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

in tal caso $(\mathbb{Z}/_2)^4 = W_1 \oplus W_2$.

2) <u>FALSO</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ non sono simili

3) <u>VERO</u> $\dim \operatorname{Ker} \varphi_1 \geq \dim V - 1$

$\dim \operatorname{Ker} \varphi_2 \geq \dim V - 1$

Grassmann:

$\dim(\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2) \geq 2(\dim V - 1) - \dim V$

<u>Es 1</u> a) È sufficiente verificare $\Lambda \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Ogni matrice $E_{ij} - E_{ij+1}$ ha un coeff $= 1$
un coeff $= -1$
gli altri nulli quindi la somma dei coeff. è 0

b) basta prendere $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

<u>Es 2</u> 0 è l'unico autovalore di A: Sia $0 \neq v_1 \in \operatorname{Ker} A (\neq \{0\})$.
Sia v_2 t.c. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ sia una base
$M_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. Poiché il pol. caratteristico è λ^2 si ha $a_{22} = 0$.

Quindi A è simile a $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha \neq 0$ perché $A \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Prendiamo A t.c. $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

se $\mu_g(1) = 2$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se $\mu_g(1) = 1$, siano:

v_1 base di V_2

v_2 base di V_1, v_3 t.c.

$\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ base $\mathbb{K}^3$

$$M_B(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{33} = 1$ perché $P_{M_B(L_A)}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$a_{23} \neq 0$ altrimenti $\mu_g(1) = 2$.

Poniamo $v_2' = a_{23} v_2$,

$$v_3' = v_3 - \frac{a_{13}}{2} v_1$$

$B' = \{v_1, v_2', v_3'\}$ è ancora una base

$L_A(v_1) = 2v_1$

$L_A(v_2') = v_2'$

$L_A(v_3') = L_A(v_3) - \frac{a_{13}}{2} L_A(v_1) =$

$$\cancel{a_{13}v_1} + a_{23}v_2 + v_3 - \cancel{a_{13}v_1}$$

$$\begin{gathered} \shortparallel \\ v_2' \end{gathered}$$

quindi $M_{B'}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Perciò una matrice con pol. caratteristico $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ è simile o a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ o a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi due delle tre matrici sono simili alla stessa.

(se $\mathbb{K}$ ha caratteristica due ci sono lievi modifiche ma funziona)

3) Supponiamo X autovettore di $\mathcal{L}$ con autovalore λ:

$$AX - XA = \lambda X.$$

Sia H invertibile t.c.

$A = HBH^{-1}$. Allora

$$HBH^{-1}X - XHBH^{-1} = \lambda X$$

moltiplicando a sin per H^{-1} a destra per H:

$$B(H^{-1}XH) - (H^{-1}XH)B = \lambda H^{-1}XH$$

Cioè $H^{-1}XH$ è autovettore di β con autovalore λ.

poiché $M_3(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_3(\mathbb{Q})$

$X \longrightarrow H^{-1} X H$

è un isomorfismo,

α e β hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità quindi

α diagonalizz $\Longleftrightarrow$ β diag.

b) Per il punto precedente basta studiare

$\delta : M_3(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_3(\mathbb{Q})$

$\delta(X) = \Delta X - X\Delta$

con $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: Se $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \_ & \cdots & \end{pmatrix}$

$$\delta(X) = \begin{pmatrix} 0 & -X_{12} & -2X_{13} \\ X_{21} & 0 & -X_{23} \\ 2X_{31} & X_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le matrici elementari sono una base di autovettori

4) Per $\alpha \neq 0$ C_α non è un ssv. e span C_α ha dim 2.

Per $\alpha = 0$ C_α è un ssv di dim 1.

$\mathcal{H}_\alpha = \{ f : f(\mathrm{span}\, C_\alpha) \subseteq W \}$.

quindi:

$\alpha = 0$ sia v_1 base C_α

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$

con $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f \in \mathcal{H}_\alpha \iff$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}, \dim \mathcal{H}_\alpha = 7$$

Se $\alpha \neq 0$

$\tilde{B} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ con

$\{ v_1, v_2 \}$ base di $\mathrm{Span}\, C_\alpha$.

$$f \in \mathcal{H}_\alpha \iff M_{B}^{\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{H}_\alpha = 5$

b) Se $\alpha \neq 0$ ogni $f \in \mathcal{H}_\alpha$ porta un ssv di dim 2 ($\mathrm{Span}\, C_\alpha$) in uno di dim 1 (W) quindi non può essere iniettiva

Se $\alpha = 0$ esistono f iniettive in $\mathcal{H}_\alpha$, es.

$f(v_1) = w_1 \quad f(v_2) = w_2 \quad f(v_3) = w_3$