Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - III appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 14 giugno 2021
Tema 1

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Sia $v \in \mathbb{K}^n$ tale che $\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \oplus \mathrm{Span}\{v\}$. Allora v è multiplo di e_n.
2. Sia $f \in End(V)$ tale che $V = \ker(f) \oplus Im(f)$. Allora f è diagonalizzabile.
3. Siano A_1, A_2, A_3 in $M_5(\mathbb{K})$ tre matrici di rango 1. Allora $rg(A_1 + A_2 + A_3) \leq 3$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $W_a = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + \cdots + x_4 = a, x_1 - x_2 = 0\}$ e $U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
Sia

$$\mathcal{H}_a = \{f \in End(\mathbb{Q}^4) \mid f(U) \subseteq U, f(W_a) \subseteq W_0\}.$$

a) Determinare $\dim \mathcal{H}_a$ al variare di a.

b) Per quali valori di a il sottospazio $\mathcal{H}_a$ contiene funzioni iniettive?

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice in $M_4(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare se esistono valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ per cui la matrice $A_{a,b}$ è diagonalizzabile.

b) Dire per quali valori di $a, b \in \mathbb{Q}$ la matrice $A_{a,b}$ è simile a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $f \in End(V)$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a) Calcolare il polinomio caratteristico di $g = f + (f + 2I)^{-1}$ e determinare molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di g.

b) Come cambia il risultato se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

c) Come cambia il risultato se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

i) Siano $f, g \in End(V)$ tale che:

a) $\dim Im(f) = \dim Im(g) = 2$;

b) $f \circ g = g \circ f$.

Mostrare che se $f \circ g \neq 0$ allora $\dim \ker(f) \cap \ker(g) \geq 1$.

ii) Dare un esempio di endomorfismi f e g tali che $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$, $rg(f \circ g) = 2$ e che verificano $a)$ ma non $b)$.