Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - II appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 1 Febbraio 2021

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Sia $V = (\mathbb{Z}/2)^4$ e siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di V di dimensione 2. Allora $V = W_1 \oplus W_2$ oppure $W_1 \cap W_2$ contiene un numero pari di elementi.
2. Siano $A, B \in M_3(\mathbb{K})$ matrici con polinomio caratteristico $(x-1)(x-2)^2$. Allora A e B sono simili.
3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Se $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ allora $\dim(\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2) \geq \dim V - 2$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\varphi : M_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

$$A = (A_{ij}) \mapsto \sum_{i,j} A_{ij}.$$

a) Indichiamo con E_{ij} le matrici elementari in $M_n(\mathbb{Q})$ e con Λ il sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{Q})$ generato dalle matrici $E_{ij} - E_{ij+1}$ per $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n-1$. Mostrare che esiste una applicazione lineare $F : M_n(\mathbb{Q})/\Lambda \to \mathbb{Q}$ tale che $F \circ \pi = \varphi$, essendo $\pi : M_n(\mathbb{Q}) \to M_n(\mathbb{Q})/\Lambda$ la proiezione naturale sul quoziente.

b) Mostrare che esiste $B \in M_n(\mathbb{Q})$ tale che $\varphi(A) = tr(AB)$ e determinare tale B.

Esercizio 2.

a) Sia A una matrice non nulla in $M_2(\mathbb{K})$ con polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2$. Mostrare che A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Siano $A_1, A_2, A_3 \in M_3(\mathbb{K})$ matrici con polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Mostrare che almeno due tra queste matrici sono simili.

Esercizio 3. Siano $A, B \in M_3(\mathbb{Q})$ matrici simili e siano $\alpha, \beta : M_3(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ le applicazioni lineari definite nel modo seguente:

$$\alpha(X) = AX - XA, \quad \beta(X) = BX - XB.$$

a) Mostrare che α è diagonalizzabile se e solo se β è diagonalizzabile e che α e β hanno gli stessi autovalori.

b) Sia $A \in M_3(\mathbb{Q})$ con polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Mostrare che α è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Siano W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{Q}^3$ generato dal vettore $(2, 1, 3)^T$,

$$C_\alpha = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = \alpha, x - y = 0\},$$

e $\mathcal{H}_\alpha = \{f \in End(\mathbb{Q}^3) \mid f(C_\alpha) \subseteq W\}$.

a) Determinare $\dim(\mathcal{H}_\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$.

b) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{Q}$ il sottospazio $\mathcal{H}_\alpha$ contiene applicazioni iniettive?