Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - IV appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 6 luglio 2021

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Siano $f, g : V \to W$ applicazioni lineari. Se $\ker f = \ker g$ e $Imf = Img$ allora $f = g$.
2. Siano V uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$. Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V tali che $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}(f)$. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.
3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Se esistono $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ basi di V e W tali che $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = I$ allora f è un isomorfismo.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice di rango 1. Mostrare che A è simile ad una delle due seguenti matrici:

$$B = \begin{pmatrix} tr(A) & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{K}^4$ e siano $U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Calcolare una base di $Ann(U) + Ann(W) \subseteq (\mathbb{K}^4)^*$.

Esercizio 3. Sia $I = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$.

a) Dire se I è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Determinare una base di $\mathrm{Span}\, I$.

c) Mostrare che $\{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* \,|\, \varphi|_I = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}^3)^*$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4.

a) Siano $U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,|\, x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$. Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{Q}^4$ tale che $f|_U = 2Id_U$ e $f|_W = Id_W$. Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.

b) Dati due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di $\mathbb{Q}^4$, di dimensione 2, determinare le condizioni su W_1 e W_2 che assicurano che esista $f \in End(\mathbb{Q}^4)$ tale che $f|_{W_1} = 2Id_{W_1}$ e $f|_{W_2} = Id_{W_2}$.