Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 11 Gennaio 2021

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. L'insieme dei sottospazi vettoriali di V è finito se e solo se $\dim V \leq 1$.
2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $F \in End(V)$, tale che le radici di $p_F(\lambda)$ sono nel campo $\mathbb{K}$. La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di F è uguale alla dimensione di V.
3. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V. Se $W_1 \neq W_2$ allora $Ann(W_1) \neq Ann(W_2)$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{Q}^4$, e siano

$$W_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \text{ e } W_2 = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Sia $f \in Hom(W_1, \mathbb{Q}^2)$ la restrizione a W_1 della moltiplicazione per $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, e $g_a \in Hom(W_2, \mathbb{Q}^2)$ l'applicazione tale che $g_a(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $g_a(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.
Dire per quali $a \in \mathbb{Q}$ esiste $F \in Hom(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^2)$ la cui restrizione a W_1 sia f e la cui restrizione a W_2 sia g_a. Per tali a, calcolare la matrice di F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^4$ e $\mathbb{Q}^2$.

Esercizio 2. Siano V uno spazio di dimensione 4 su $\mathbb{K}$ e V^* il suo duale. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V di dimensione 2, e sia

$$\mathcal{H} = \{f \in Hom(V, V^*) \,|\, f(W_1) \subseteq Ann(W_1) \,\text{e}\, f(W_2) \subseteq Ann(W_2)\}$$

a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{H}$ nell'ipotesi che $V = W_1 \oplus W_2$.

b) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{H}$ nell'ipotesi che $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

Esercizio 3. Sia $A_a \in M_3(\mathbb{Q})$ la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a-2 & 1 & 0 \\ 3a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali $a \in \mathbb{Q}$ la matrice A_a è diagonalizzabile?

b) Per quali $a \in \mathbb{Q}$ la matrice A_a ha un insieme infinito di sottospazi invarianti?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo dove $1+1 \neq 0$, e sia $F \in End(V)$, tale che esiste $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ per cui $F^2 = aI$.

a) Mostrare che F è diagonalizzabile se e solo se a è un quadrato in $\mathbb{K}$, esiste cioè $\alpha \in \mathbb{K}$ per cui $\alpha^2 = a$.

b) Supponiamo invece che esistano $a, b \in \mathbb{K}$ per cui $F^2 - 2aF + bI = 0$ con $a^2 - b \neq 0$. Mostrare che F è diagonalizzabile se e solo se $a^2 - b$ è un quadrato in $\mathbb{K}$ (suggerimento: completare il quadrato e applicare il punto precedente).