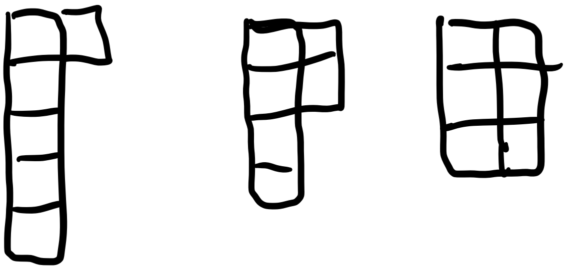
Es. 1. Poiché $q_{f^2}(\lambda) = \lambda^2$

f^2 è nilpotente, dunque anche f lo è.

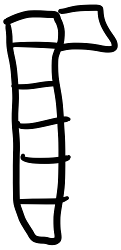
i possibili diagrammi di Young per f^2

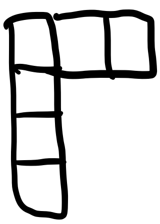
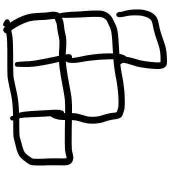
sono 

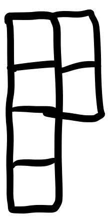
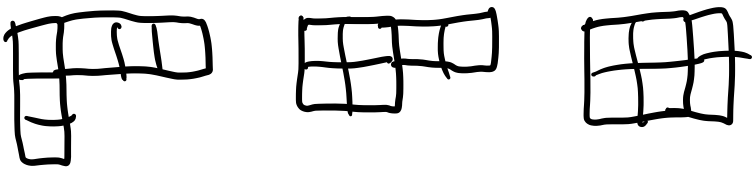
Il diagr. di Young di f^2 ha:

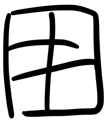
nella prima colonna la somma delle lungh. delle prime due colonne del diagr. di f

nella seconda la somma delle lung. delle terza e quarta colonne del diagr. di f

Le possibilità se f^2 è  sono

 e 

se f^2 è  : 

Se f^2  non ci sono possibilità

Es. 2:

Se $g^2 = f$ $\qquad g \cdot f = g \cdot g^2 = g^2 \cdot g = f \cdot g$.

f ha una base di Jordan e le possibilità sono per la matr. di J.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 4 & \\ & & & 4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 4 & \\ & & & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{array}\right)$$ in ogni caso

g, per commutare deve essere diag. a blocchi

$g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ e si deve avere

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

con $a, b = 0, 1$.

Se $a = 0$ o $b = 0$ ci sono infinite soluzioni, ad esempio $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è risolto da una qualsiasi matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

l'unica possibilità che resta è $a=b=1$

in questo caso si vede che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A, per commutare con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deve

essere della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

con $\alpha^2 = 1$ $\quad 2\alpha\beta = 1$ quindi ci

sono due soluzioni $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B ha ugualmente due possibilità

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1/4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Es. 3

a) A e B essendo simmetriche sono diagonalizzabili.
Due matrici diagonalizzabili sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico

b) $A = I$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \bar{i} \\ 1 & 1 & 0 \\ \bar{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

hanno pol. caratteristico $(\lambda - 1)^3$.

Non sono simili in quanto I è simile solo a se stessa.
D'altra parte hanno rango 3,
e su un campo alg. chiuso

due matrici simmetriche sono congruenti $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso rango.

Es. 4

La simmetria si vede osservando che scambiando v_1 e v_2 i due addendi che definiscono β si scambiano.

Sia e_1, e_2 una base ortonormale di U. Per l'ipotesi $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ è una base ortonormale di $U^\perp$

Se poniamo

$$e_3 := \varphi(e_1) \quad e_4 = \varphi(e_2) \Rightarrow$$

$\{e_1 \dots e_4\} = \mathcal{B}$ è una base ortonormale.

Poiché $\pi_U(e_1) = e_1$ $\pi_U(e_2) = e_2$

$\pi_U(e_3) = 0$ $\pi_U(e_4) = 0$

$\pi_{U^\perp}(e_1) = \pi_{U^\perp}(e_2) = 0$, $\pi_{U^\perp}(e_3) = e_3$

$\pi_{U^\perp}(e_4) = e_4$, la matrice di

β rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

si vede facilmente che la segnatura è 2,2 e i sottosp. isotropi massimali han dim 2.

c) Se φ è un qualunque isom: e_1, e_2 base ortonorm di U, e_3, e_4 base ortonorm di $U^\perp$, scriviamo

$$\varphi(e_1) = a e_3 + b e_4$$
$$\varphi(e_2) = c e_3 + d e_4$$

la matrice di β è

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

poiché A è invertibile la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ è inv. quindi la forma è non degenere

Oss. che $\{e_1, e_2\}$ è un ssv isotropo. Questo è necessariamente massimale: se ci fosse un ssv isotropo di dim ≥ 3 β sarebbe degenere.

D'altra parte un ssv isotropo di dim 2 si ha solo se la segnatura è $(2,2)$