Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 1 febbraio 2022

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia β_A la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice A rispetto alla base canonica. Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale sia rispetto al prodotto scalare standard che alla forma β_A.

Esercizio 2. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ una base di V^*. Definiamo $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ nel modo seguente:

$$\phi(u, v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v) - \varphi_2(u)\varphi_1(v) + \varphi_1(u)\varphi_3(v) - \varphi_3(u)\varphi_1(v).$$

a) Mostrare che ϕ è bilineare antisimmetrica.

b) Mostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.
Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico p_A di A e dire se L_A sia triangolabile.

(ii) Determinare gli autovalori di L_A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Dire se L_A è diagonalizzabile.

(iii) Determinare il polinomio minimo q_A di A.

(iv) Se L_A è triangolabile, determinare una base che la triangola.

Esercizio 4. Siano A e B le due matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile H tale che le due matrici $H^{-1}AH$ e $H^{-1}BH$ siano entrambe diagonali.