

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B -
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 10 Gennaio 2022

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Dato $a \in \mathbb{Q}$ sia β_a la forma bilineare su \mathbb{R}^4 associata alla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare per quali valori di a la forma β_a è degenere.
- b) Trovare una base ortogonale per β_a e determinare la segnatura.
- c) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la dimensione massima dei sottospazi isotropi.

Esercizio 2. Dati $a, b \in \mathbb{Q}$ sia $A_{a,b}$ la matrice

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare, in dipendenza da a e b , il polinomio minimo di $A_{a,b}$.
- b) Determinare, in dipendenza da a e b , la forma di Jordan di $A_{a,b}$.

Esercizio 3. Elencare le possibili classi di similitudine di endomorfismi di uno spazio vettoriale su \mathbb{Q} con polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^4(\lambda - 3)^4$ e polinomio minimo $(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$ (ad esempio scrivendo le possibili forme di Jordan).

Esercizio 4. Sia V un \mathbb{K} spazio vettoriale con \mathbb{K} algebricamente chiuso. Siano $f, g \in \text{End}(V)$ tali che $f \circ g = g \circ f$.

- a) Mostrare che " f e g possono essere triangolarizzate simultaneamente", cioè esiste una base \mathcal{B} tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}(g)$ sono triangolari superiori.
- b) E' vero viceversa che se tale base \mathcal{B} esiste allora necessariamente $f \circ g = g \circ f$?