Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B -
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 14 giugno 2021

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6. Quante sono le classi di similitudine degli endomorfismi $f \in End(V)$ tali che f^2 abbia polinomio minimo $q_{f^2}(\lambda) = \lambda^2$?

Esercizio 2. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{Q}^4$ tale che:

i) il polinomio caratteristico di f è $p_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)^2$;

ii) esiste solo un numero finito di endomorfismi $g \in End(\mathbb{Q}^4)$ tali che $g^2 = f$.

Dopo aver osservato che g commuta con f, determinare la forma canonica di Jordan di f.

Esercizio 3.

a) Siano $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ due matrici simmetriche congruenti, con lo stesso polinomio caratteristico. Mostrare che A e B sono simili.

b) Dare un esempio di matrici $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ simmetriche congruenti che abbiano lo stesso polinomio caratteristico ma che non siano simili.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia $\langle\, , \rangle$ il prodotto scalare standard su V. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V di dimensione 2 e sia $U^\perp$ il suo ortogonale, e indichiamo con π_U e con $\pi_{U^\perp}$ le proiezioni ortogonali rispettivamente su U e su $U^\perp$. Sia $\varphi : U \to U^\perp$ un'applicazione lineare che manda basi ortonormali di U in basi ortonormali di $U^\perp$ e sia β la forma bilineare su V così definita:

$$\beta(v_1, v_2) := \langle \varphi(\pi_U(v_1)), \pi_{U^\perp}(v_2)\rangle + \langle \varphi(\pi_U(v_2)), \pi_{U^\perp}(v_1)\rangle.$$

a) Mostrare che β è una forma bilineare simmetrica non degenere e calcolarne la segnatura.

b) Determinare la dimensione massima di un sottospazio vettoriale isotropo per β.

c) Come cambiano i risultati di b) ed a) se φ è semplicemente un isomorfismo?