

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B - II appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 6 Luglio 2021

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia β la forma bilineare su \mathbb{R}^4 la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- i) Determinare un sottospazio isotropo U di dimensione massima.
- ii) Mostrare che ogni sottospazio isotropo per β è contenuto in U .
- iii) Costruire, se possibile, una matrice simmetrica C di ordine 4, non congruente a B , che abbia sottospazi isotropi massimali della stessa dimensione di U .

Esercizio 2. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Q}$ le due matrici in $M_4(\mathbb{Q})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono simili.

Esercizio 3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Determinare $K \in SO(3)$ e T triangolare superiore tali che $A = KT$.
- b) Data una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$, esistono sempre $K \in SO(n)$ e T triangolare superiore tali che $A = KT$?
- c) Data una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$, esistono sempre $K \in SO(n)$ e T triangolare superiore con autovalori positivi tali che $A = KT$?

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_4 = 0 \right\} \quad \text{e} \quad W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver verificato che U e W sono in somma diretta, indichiamo con π_U e π_W le proiezioni relative alla scomposizione $V = U \oplus W$, e con f l'endomorfismo di V definito da $f = \sqrt{2}\pi_U + 3\pi_W$.

Dire se esiste un prodotto scalare β su V rispetto al quale f sia autoaggiunto e in caso affermativo determinare la matrice di β rispetto alla base canonica.