Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - V appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 25 luglio 2022

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Siano $E, F \subseteq V$ due sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V. Se $E \subseteq Span\{F\}$ allora $F \cap E \neq \emptyset$.
2. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V tale che $\dim V - \dim W = k$. Allora esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ tali che $W = \cap_{i=1}^k \ker \varphi_i$.
3. Siano $f, g \in End(V)$. Se esiste una base i cui vettori sono autovettori sia di f che di g allora $f \circ g = g \circ f$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{K}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z)^T \mid x - 2y + z = 0\}, \quad W_2 = \{(x, y, z)^T \mid 2x + 3y - z = 0\}$$

e sia $\mathcal{H} = \{f \in End(\mathbb{K}^3) \mid f(W_1) \subseteq W_2, f(W_2) \subseteq W_1\}$.

i) Dimostrare che $\mathcal{H}$ è un sottospazio di $End(\mathbb{K}^3)$ e calcolarne la dimensione.

ii) Mostrare che ogni elemento $f \in \mathcal{H}$ ha un autovettore.

iii) Stabilire se esistono elementi invertibili $f \in \mathcal{H}$ che siano diagonalizzabili.

Esercizio 2. Siano $A \in M_k(\mathbb{K})$, $B \in M_h(\mathbb{K})$ e

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Mostrare che C è diagonalizzabile se e solo se A e B lo sono.

Esercizio 3. Sia $A \in M_4(\mathbb{K})$ tale che $A^3 = A^2$.

a) Mostrare che $\ker A^2 \cap Im(A) = \ker A \cap Im(A)$.

b) Stabilire se A è necessariamente diagonalizzabile.

c) Nel caso in cui A sia diagonalizzabile determinare le possibili forme diagonali di A.

Esercizio 4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $f^* : W^* \to V^*$ l'applicazione definita da: $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Mostrare che f è suriettiva se e solo se f^* è iniettiva.