**Corso di Laurea in Matematica**
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 31 Gennaio 2022

**Quesiti preliminari.** Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Siano $A, B$ due matrici invertibili simili. Allora anche $A + A^{-1}$ e $B + B^{-1}$ sono simili.
2. Esiste una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ di $M_2(\mathbb{Q})$ formata da matrici la cui traccia è nulla.
3. Sia $f \in End(V)$. Un sottospazio di $V$ di dimensione uno è $f-$invariante se e solo se è generato da un autovettore di $f$.

**Esercizi.** Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

**Esercizio 1.** Dire quali dei seguenti sottoinsiemi $U$ sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $V = M_3(\mathbb{Q})$:

- $U = \{A \in V \,|\, det(A) = 0\}$;
- $U = \{A \in V \,|\, L_A \text{ è iniettiva}\}$;
- $U = \{A \in V \mid \text{la somma dei coefficienti della prima riga di A è } 0\}$.

Per ogni $U$ che non sia sottospazio di $V$ stabilire se $Span(U) = V$.

**Esercizio 2.** Dimostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono simili, e trovare una matrice invertibile $H$ tale che $B = HAH^{-1}$. Più in generale dimostrare che ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è simile alla matrice $B = (b_{ij})$ ottenuta per "rotazione di 180 gradi" di $A$, ossia $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

**Esercizio 3.** Sia $V$ uno spazio di dimensione 2 su $\mathbb{Q}$ e sia $f$ un endomorfismo tale che $f^2 + 4I = 0$.

a) Mostrare che $f$ è invertibile.

b) Mostrare che $f$ non è diagonalizzabile.

c) Mostrare che esiste una base di $V$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Esercizio 4.** Sia $V = \mathbb{Q}^3$ e siano $W_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $W_2 = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. Dire, motivando la risposta, se esiste una base $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ di $V^*$ tale che $\psi_1 \in Ann(W_1 + W_2)$, $\psi_2 \in Ann(W_1)$ e $\psi_3 \in Ann(W_2)$, e, in caso affermativo, costruirla.