Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 10 Gennaio 2022

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Siano A, B due sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V. Si ha $A \subseteq B$ se e solo se $Span(A) \subseteq Span(B)$.
2. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ non diagonalizzabili. Allora nemmeno AB è diagonalizzabile.
3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con $p \neq 2$. Allora V ha un numero dispari di elementi.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano

$$W_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \} \text{ e}$$

$$W_2 = \text{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{K}^4.$$

Sia

$$\mathcal{H} = \{ f \in End(\mathbb{K}^4) \,|\, f(W_1) \subseteq W_1 \,\text{e}\, f(W_2) \subseteq W_2 \}$$

a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{H}$ nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

b) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{H}$ nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Si consideri, per $a \in \mathbb{Q}$, la matrice in $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A_a = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{Q}$ la matrice A_a è diagonalizzabile?

b) Poniamo $A = A_1$. Mostrare che esiste $v \in \mathbb{Q}^3$ tale che $\{v, Av, A^2v\}$ è una base di $\mathbb{Q}^3$. Scrivere la matrice di L_A in tale base.

Esercizio 3. Sia $F : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$ l'endomorfismo definito:

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \qquad (1)$$

a) Mostrare che F è invertibile e $F^{-1} = F^3$.

b) Determinare autovalori e autovettori di F e studiare la diagonalizzabilità.

c) Sia adesso $F_{\mathbb{C}} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ ancora definita dalla (1): determinare autovalori e autovettori e studiare la diagonalizzabilità di $F_{\mathbb{C}}$.

Esercizio 4.

a) Sia $tr : M_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ la funzione che associa a una matrice quadrata X la sua traccia $tr(X)$, cioè la somma degli elementi sulla diagonale. Mostrare che tale funzione "si annulla sui commutatori di matrici", vale a dire $tr(AB - BA) = 0$ per ogni coppia di matrici $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$.

b) Sia $\phi \in M_2(\mathbb{Q})^*$ tale che per ogni coppia di matrici $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ si abbia

$$\phi(AB - BA) = 0,$$

cioè ϕ "si annulla sui commutatori di matrici". Mostrare che esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $\phi(X) = c(tr(X))$ (suggerimento: scrivere i commutatori delle matrici elementari).