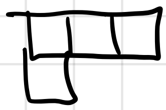
ES 1 Calcoliamo α^2,

$$\alpha^2(X) = A(AX - XA) - (AX - XA)A = -2AXA$$

poiché $A^2 = 0$ per C-H.

$$\alpha^3(X) = A(-2AXA) + (2AXA)A = 0.$$

b) Se $A \neq 0$ $\alpha^2 \neq 0$. Quindi $q_\alpha(\lambda) = \lambda^3$

$\dim M_2(\mathbb{Q}) = 4$ quindi 

c) Se $A = \lambda I \Rightarrow \alpha = 0$ e il suo pol. minimo è λ

Se $A = H^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}H$ Calcolando

$\alpha(H^{-1}E_{11}H)$, $\alpha(H^{-1}E_{12}H)$ .... si trova

che la matrice di α nella base $H^{-1}E_{ij}H$

è diagonale con autovalori. 0 molt 2

$\lambda_1 - \lambda_2$ molt 1

$\lambda_2 - \lambda_1$ ....

$$q_\alpha = \lambda(\lambda - (\lambda_1 - \lambda_2))(\lambda - (\lambda_2 - \lambda_1))$$

Es2) Poiché una forma definita non ammette vettori isotropi $\neq 0$ le possibili forme hanno segnatura $(2,2)$ $(3,1)$ e $(1,3)$. Poiché $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

possiamo assumere che $M_{\mathcal{B}}(\beta)$ sia rispettivamente $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$

$\mathcal{B}=\{v_1 \dots v_4\}$

chiaramente se la seconda ammette una base di vettori isotropi anche la terza la ammette.

Nel caso di segnatura 2,2

$\{v_1+v_3,\ v_1-v_3,\ v_2+v_4,\ v_2-v_4\}$ è una base di v.i.

nel caso 3,1

$\{v_1+v_4,\ v_2+v_4,\ v_3+v_4,\ -v_1+v_4\}$ è una base di v.i. Quindi le sole segnature escluse sono 4,0 e 0,4

Es 3. Sia q_A il pol. minimo di A: $\deg q_A \leq n$. È facile vedere che $q_{L_A} = q_A$ poiché

per ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[t]$ si ha $L_{p(A),r} = p(L_{A,r})$. Quindi per ogni $X \in M_{n,r}(\mathbb{K})$ $q_A(L_{A,r})(X) = 0$,

perciò $X, L_{A,r}(X), \dots L^n_{A,r}(X)$

sono L.D. e $\dim \mathrm{Span}\{L^k_{A,r}(X)\}_k \leq n$

$< \dim M_{n,r}(\mathbb{K})$ per $r \geq 2$

cioè nessun elemento può essere ciclico

b) Come detto la sol. completa è fuori portata. Quello che si può osservare è: se $W_1, \dots W_r \subseteq \mathbb{K}^n$ sono ssv A-invarianti

$\Rightarrow \{X = (X_1 \dots X_r) \in M_{n,r} : X_i \in W_i\}$ è $L_{A,r}$ invariante

c) Poiché se $X = (X_1, X_2, \dots X_r) \Rightarrow$

$L_{A,r}(X) = (AX_1, \dots AX_r)$, si ha che

$\forall l$ $\dim \operatorname{Ker} L^{l}_{A,r} = r \dim \operatorname{Ker} A$

quindi il diagramma di Young di $L_{A,r}$

si ottiene moltiplicando per r le lunghezze

di ogni colonna.

Es. 4 Poiché A è def. positiva

esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $A = H^T H$.

B def negativa $\Rightarrow \exists K \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c.

$B = -K^T K$.

$$\operatorname{Tr}(AB) = -\operatorname{Tr}(H^T H K^T K) =$$

$$-\operatorname{Tr}(H K^T K H^T) = -\operatorname{Tr}(\underbrace{(KH^T)^T KH^T}_{\substack{\text{def positiva} \\ \Rightarrow \text{traccia} > 0}})$$