Esercizio 1

- Osserviamo che se due matrici A e B sono congruenti $\Rightarrow \dfrac{\det B}{\det A}$ è un quadrato in $\mathbb{K}$.

Quindi $\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ non possono essere congruenti.

- Quanto alla terza matrice abbiamo che se prendiamo la base e_1, e_2, e_4, e_3 la matrice di β_3 diventa $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$.

- Per la prima matrice: Consideriamo la base $e_1 + e_3,\ e_2 + e_4,\ e_2 - e_4,\ e_1 - e_3$. In questa base la matrice di β_1 è $\begin{pmatrix} & & & 2 \\ & & 2 & \\ & 2 & & \\ 2 & & & \end{pmatrix}$ quindi basta considerare la base $e_1 + e_3,\ e_2 + e_4,\ \frac{1}{2}(e_2 - e_4),\ \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$

<u>Es 3</u> Sia v_1 un vettore isotropo $\neq 0$. poiché β è non degenere esiste w' t.c. $\beta(v_1, w') \neq 0$. Ponendo

$$w = \frac{w'}{\beta(v_1, w')} \quad \text{si ha} \quad \beta(v_1, w) = 1$$

w non può essere multiplo di v_1 altrimenti $\beta(v_1, w) = 0$.

Se $U = \mathrm{Span}\{v_1, w\}$ $M_{\{v_1, w\}}(\beta|_U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

quindi è non degenere e $V = U \oplus U^\perp$

Completando $\{v_1, w\}$ con una base di $U^\perp$

si arriva a $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & a & 0 \\ \hline 0 & & A \end{array}\right)$. Per completare

l'esercizio basta trovare $v_2 \in \mathrm{Span}\{v_1, w\}$ t.c. $\beta(v_1, v_2) = 1$ e $\beta(v_2, v_2) = 0$.

cerchiamo v_2 della forma $v_2 = w + tv_1$ osservando che $\beta(v_1, w + tv_1) = 1$.

imponendo

$$0 = \beta(w + t v_1, w + t v_1) =$$

$$\beta(w, w) + 2t\,\beta(v_1, \overset{=1}{w}) + t^2 \cancel{\beta(v_1, v_1)}$$

si trova, per $t = -\frac{1}{2}\beta(w, w)$

la base cercata.

<u>Es. 2</u> 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ diagonale,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non diagonalizz

2) Una matrice nilpot A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = 0$

Quindi A^2 (nilpotente in quanto quadrato di una nilpot) è diag $\Leftrightarrow A^2 = 0$ ma allora $A^3 = 0$

3) Poiché $A \in M_n(\mathbb{C})$ ha una forma di Jordan:

$$\mathbb{C}^n = V_0^{gen} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} V_{\lambda_i}^{gen} \right)}_{W}.$$

Questi spazi sono A invarianti quindi A^2 invarianti. Quindi A^2 è diagonalizzabile sse $A^2|_{V_{\lambda_i}^{gen}}$ lo è $\forall \lambda_i$ (incluso 0).

$A^2|_{V_0^{gen}}$ è diag. sse $A^2|_{V_0^{gen}} = 0$ per quanto visto nel punto 2. In tal caso $A^3|_{V_0^{gen}} = 0$. Per $\lambda_i \neq 0$ invece $A^2|_{V^{gen}}$ è diagonalizz $\Leftrightarrow A|_{V^{gen}}$ lo è. Questo si può vedere in almeno di due modi

1) $A^2|_{V^{gen}_{\lambda_i}}$ diag. sse $x - \lambda_i$ è il suo pol. minimo.

in tal caso $A^2|_{V^{gen}_{\lambda_i}} - \lambda_i I_{V^{gen}_{\lambda_i}} = 0$

$\Rightarrow$ poiché $\lambda_i \neq 0$

$$\left(A|_{V^{gen}_{\lambda_i}} - \sqrt{\lambda_i}\, I_{V^{gen}_{\lambda_i}}\right)\left(A|_{V^{gen}_{\lambda_i}} + \sqrt{\lambda_i}\, I_{V^{gen}_{\lambda_i}}\right) = 0$$

quindi il pol. minimo di $A|_{V^{gen}_{\lambda_i}}$ è libero da quadrati.

Riassumendo: Se A^2 è diagonalizz

$\Rightarrow$ $A^2|_{V^{gen}_0} = 0$ e $A|_{V^{gen}_{\lambda_i}}$ è diagonalizz.

Perciò $A^3|_{V^{gen}_0} = 0$ e $A^3|_{V^{gen}_{\lambda_i}}$ è diagonalizz

Es. 4

1) V_1 ha dim $2 = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$

Poiché lo spazio generato da un autovettore è sempre g-invariante $\Rightarrow$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\mathrm{Span}\{\alpha v_1 + \beta v_2\}$

è un SSV g-invariante.

2) Intanto elenchiamo alcuni SSV invarianti "evidenti":

dim 0 $\{0\}$

dim 1 $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Ker}(g - 2I)$

(sono gli autosp. e non ce ne sono altri).

dim 2 $\quad \operatorname{Ker} g^2, \operatorname{Ker}(g-2I)^2$

$\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)$.

dim 3 $\quad \operatorname{Ker} g^2 \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)$

$\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)^2$.

dim 4 $\quad V$

Adesso dobbiamo mostrare che non ce ne sono altri:

Ci sono varie possibilità.

1) il pol. caratteristico di g è $x^2(x-2)^2$. Se W è inv.

$p_{g|_W}$ deve dividerlo.

Quindi se $\dim W = 3$

$$p_{g_{|W}} = x^2(x-2) \quad o \quad x(x-2)^2$$

Nel primo caso $W = \operatorname{Ker} g_{|W}^2 \oplus \operatorname{Ker}(g_{|} - 2I)$

questo vuol dire

$$\operatorname{Ker} g_{|W}^2 \subseteq \operatorname{Ker} g^2$$

$$\operatorname{Ker}(g_{|W} - 2I) \subseteq \operatorname{Ker}(g - 2I).$$

Ma guardando le dimensioni si vede che si deve avere $=$.

Perciò $W = \operatorname{Ker} g^2 \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)$.

Analogamente nell'altro caso

$$W = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)^2.$$

In dim 2 si hanno le possibilità x^2, $(x-2)^2$, $(x-2)x$. Ragionando come prima si trovano i 3 SSV g-invarianti prima elencati.

2° modo. Ispirato al probl. dei vettori ciclici.

Sia v_1, v_2, v_3, v_4 la base di Jordan, cioè $g(v_1)=0$ $g(v_2)=v_1$ $g(v_3)=2v_3$ $g(v_4)=2v_4+v_3$

Sia W g-inv. e

$$W = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

Calcoliamo $g(w), g^2(w), g^3(w)$

I coeff. di $w, g(w), g^2(w), g^3(w)$

nella base danno la matrice

(dividendo per 4 le ultime due righe)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 2a_3+a_4 & 2a_4 \\ 0 & 0 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & 0 & 2a_3+3a_4 & 2a_4 \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$-a_2^2 a_4^2$. Quindi se $a_2 a_4 \neq 0$

W è tutto V.

Se $a_2 = 0 \Rightarrow W \subseteq \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)^2$

Se $a_4 = 0 \Rightarrow W \in \operatorname{Ker} g^2 \oplus \operatorname{Ker}(g-2I)$

Quindi se $\dim W = 3$ deve

essere uno di questi 2.

Supponiamo $\dim W = 2$.

Si possono verificare 3 casi

- $a_4 = 0 \qquad a_2 \neq 0$

  $a_2 = 0 \qquad a_4 \neq 0$

  $a_2 = 0$ e $a_4 = 0$

nell' ultimo caso

$W \subseteq \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker}(g - 2I)$ e si deve

avere uguaglianza.

Supponiamo quindi $a_4 = 0$ e $a_2 \neq 0$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_2 & 0 & 2a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

che però ha rango 3 a meno che $a_3 = 0$ (essendo $a_2 \neq 0$)

In tal caso $W \subseteq \ker g^2$

e per ragioni di dim

$W = \ker g^2$.

Analogamente se $a_2 = 0$ e

$a_4 \neq 0$

$$
\begin{array}{c}
a_4
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_1 & 0 & a_3 & 1 \\
0 & 0 & 2a_3 + a_4 & 2 \\
0 & 0 & a_3 + a_4 & 1 \\
0 & 0 & 2a_3 + 3a_4 & 2
\end{pmatrix}
$$

la matrice ha rango 3 se

$a_1 \neq 0$. Quindi $a_1 = 0$ e

$W \subseteq \ker (g - 2I)^2$.