Es. 1 Sia f un endomorfismo che ha una base di Jordan e $V = \bigoplus V_{\lambda_i}^{gen}$ la scomposizione in autosp. generalizzati di f
Osserviamo che se $\lambda_i \neq 0$ $V_{\lambda_i}^{gen} \subseteq \mathrm{Im} f$

(perché $f_{|V_{\lambda_i}^{gen}}$ è invertibile). Segue che

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f \cap V_0^{gen} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} V_{\lambda_i} \right)$$

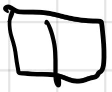
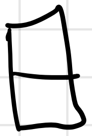
Sia $V = \oplus W_{\lambda_i}^{gen}$ la scomp. in autosp. gener di g. Dall'ipotesi segue che $f_{|\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} V_{\lambda_i}^{gen}}$ e $g_{|\bigoplus_{\lambda_i \neq 0} W_{\lambda_i}^{gen}}$ hanno le stesse f.d.J.

Segue anche $\dim V_0^{gen} = \dim W_0^{gen}$ e $\dim \mathrm{Im} f \cap V_0^{gen} = \dim \mathrm{Im} g \cap W_0^{gen}$.
A questo punto ci siamo ricondotti a

Prop. f, g nilpot. su uno sp. vett. U
$f_{|\mathrm{Im} f}$ e $g_{|\mathrm{Im} g}$ hanno la stesse f.d.J.
$\Rightarrow f$ e g hanno la stessa forma

Questo segue dalla dimostrazione dell'esistenza di una base di J per un endomorfismo nilpotente

Dato il diagramma di Young per $f|_{\operatorname{Im} f}$ l'unico modo per completarlo è aggiungere una casella a ogni riga non vuota, e poi aggiungere caselle fino ad arrivare a $\dim V$

ii)   $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} g^2 = 0$

f g quindi banalmente

$f|_{\operatorname{Im} f^2}$ e $g|_{\operatorname{Im} g^2}$ hanno la stessa forma di Jordan. Quindi è falso.

Es 2

a) Prendiamo $v_1 = e_1$ che non è isotropo.

$$(\operatorname{Span}\{e_1\})^\perp =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \{ 8X + 13Y = 0 \}. \quad v_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$\{v_1, v_2\}$ è ortogonale

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è isotropo se

$$8x^2 + 26xy + 21y^2 = 0$$

il polinomio $8x^2 + 26x + 21 = 0$ ha radici $-3/2$ e $-7/4$ quindi

$$8x^2 + 26xy + 21y^2 =$$

$$8\left(x + \frac{3}{2}y\right)\left(x + \frac{7}{4}y\right)$$

quindi $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ sono isotropi, e sono una base

$$\beta(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = -2$$

quindi la matrice di β rispetto a $\{w_1, w_2\}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$ Normalizzando

prendendo ad esempio

$w_2' = -\frac{1}{2} w_2$ si ha una

base per cui la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) abbiamo visto che la matrice A è congruente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) $A \in M_3(\mathbb{R})$ $A = -A^t$

sicuramente $\det A = 0$

<u>OSS. 1</u> A antisimmetrica

W A invariante $\Rightarrow W^\perp$

è A - invariante

rispetto al prod. scal standard

<u>OSS 2</u> A antisimmetrica

$C \in O(3) \Rightarrow C^{-1}AC$

è ancora antisimmetrica.

Infatti: $C^{-1}AC = C^T A C$

$(C^{-1}AC)^T = (C^T A C)^T = C^T A^T C$

$= - C^T A C = - C^{-1} A C$.

$\dim \operatorname{Ker} A = \begin{cases} 1 \\ 3 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$

niente da dimostrare.

Se $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ è una base ortonormale con $v_1 \in \operatorname{Ker} A$ e C è la matrice di cambio di base, $\operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$ è A-invariante per l'oss 1, e $C^{-1}AC$ è antisimmetrica. Quindi

$$C^{-1}AC = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{array}\right)$$

quindi: una matr. antisimm con pol. caratt. $-x(x^2+\alpha^2)$ è ortogonalmente simile a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$ Questo conclude l'esercizio.

Es. 4

i) Se $AV=0 \Rightarrow A^TAV=0$:

Si ha $\langle A^TAV, V\rangle = \|AV\|^2$

quindi $A^TAV=0 \Rightarrow AV=0$

ii) NO, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}=A$ ha rango 1, ma

$A^2=0$.

iii) Una matrice (reale) della forma $A^T A$ è

1) simmetrica

2) semidefinita positiva poiché $\langle A^T A v, v \rangle = \|Av\|^2 \geq 0$

La prima matrice non è simmetrica, la seconda non è semidef. positiva.

La terza è simm definita positiva, quindi congruente alla matrice identità, quindi $\exists C$ invertibile t.c.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 23 \end{pmatrix} = C^T I_3 C = C^T C.$$