Es. 1

a) A nilpotente $\Rightarrow$ unico autovalore 0

A simmetrica $\Rightarrow$ diagonalizzabile

(teor. spettrale)

L'unica matrice diagonalizzabile con unico autovalore 0 è $A = 0$

b) A antisimmetrica nilpot.

$\Rightarrow A^2$ è simmetrica nilpotente.

Per a) $A^2 = 0$.

Il punto c) dice $\operatorname{Ker} A^2 \subseteq \operatorname{Ker} A$

quindi $A = 0$

c) $A^2 = -A^T A \Rightarrow \langle A^2 v, v \rangle = \|Av\|^2$

quindi $A^2 v = 0 \Rightarrow Av = 0$.

prod scal stand in $\mathbb{R}^n$

<u>Es. 2</u> per ogni α

$$p_{F_\alpha}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

Se W è F_α invariante

$p_{F_\alpha|_W} =: p_W$ divide $p_{F_\alpha}(\lambda)$.

1) $p_W = \lambda - 1 \Rightarrow W \subseteq V_1$ $\dim W = 1$

se $\alpha \neq 3$ $\dim V_1 = 1$ e $W = V_1$

se $\alpha = 3 \Rightarrow \dim V_1 = 2$

un qualsiasi ssv di V_1 è F_3 inv.

2) $p_W = \lambda - 2 \Rightarrow W \subseteq V_2$ $\dim W = 1$

Se $\alpha \neq 0$ $\dim V_2 = 1$ e $W = V_2$

$\alpha = 0$ $\dim V_2 = 2$ un qualsiasi ssv di V_2 è F_0 - inv.

3) $p_W = (\lambda-1)^2 \Rightarrow W \subseteq \underline{\ker(F_\alpha - I)^2}$

$\dim W = 2 \qquad \overset{\|}{V_1^{gen}}$

$\dim V_1^{gen} = 2 \quad (\forall \alpha)$

quindi $W = V_1^{gen}$

4) $p_W = (\lambda-2)^2$ analogamente $W = V_2^{gen}$

$\dim W = 2$

$p_W = (\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow W \subseteq V_1 \oplus V_2$

e $q_W = p_W$

se $\alpha \neq 0, 3$ $\dim V_1 \oplus V_2 = 2$ e $W = V_1 \oplus V_2$

se $\alpha = 0$ $\quad W = \langle v \rangle \oplus V_2$ con $v \in V_1$

se $\alpha = 3$ $\quad W = V_1 \oplus \langle v \rangle$ con $v \in V_2$

5) $p_W = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \qquad \dim W = 3$

$\Rightarrow W \subseteq V_1^{gen} \oplus V_2$

Se $\alpha \neq 0$ $\dim V_2 = 1$ quindi

$W = V_1^{gen} \oplus V_2$

Se $\alpha = 0$ $\quad \dim V_2 = 2$

quindi possiamo avere:

$V_1^{gen} \oplus \langle v \rangle$ con $\langle v \rangle \subseteq V_2$
$v \neq 0$

o $V_1 \oplus V_2$ (visto che l'unico ssv invariante proprio di V_1^{gen} è V_1)

6) $p_W = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

stesso di 5 ma per $\alpha = 3$

7) $p_W = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2 \Rightarrow W = V$

Es 3 Poiché le matrici hanno entrambe rango 4 sono congruenti.

Per contare le basi.

Il primo vettore deve essere in $\mathrm{rad}\,\beta$ e $\neq 0$. Ci sono quindi 4 scelte.

Consideriamo $\hat{\beta}$ su $\mathbb{K}^5/\mathrm{rad}\,\beta$ è non degenere. & lo spazio ha dim 4. Per costruire una base simplettica si sceglie

$[v_2] \neq 0$ (5^4-1) scelte

poi si cerca $[w_2]$ t.c.

$\hat{\beta}([v_2],[w_2]) = 1$

l'insieme delle soluzioni
ha la forma

$$[\bar{w}_2] + \operatorname{Ker} \beta([v_2], \cdot)$$

sol. particolare

elemento $\neq 0$ nel duale

$\dim \operatorname{Ker} \beta([v_2], \cdot) = 3$

quindi 5^3 possibilità.

Passando a $(\operatorname{Span}\{[v_2], [\bar{w}_2]\})^{\perp}$

si ha uno spazio di dim 2.

lo stesso ragionamento dà

$(5^2 - 1)\, 5$ possibilità

Si hanno quindi

$(5^4-1)5^3(5^2-1)5$ basi

simplettiche $([v_2],[w_2],[v_3],[w_3])$

ogni classe $[u]$ contiene

5 vettori in $\mathbb{K}^5$.

Quindi in totale

4 scelte per $v_1 \in \operatorname{rad}\beta$

$5^4(5^4-1)5^3(5^2-1)5 =$

$5^8(5^4-1)(5^2-1)$ scelte per

$v_2 \quad w_2 \quad v_3 \quad w_3$

$5^8(5^4-1)(5^2-1)(5-1)$ basi.

Es. 4

Osserviamo che φ è rappresentabile $\Leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Im} B_R$, $B_R : V \to V^*$.

In particolare l'insieme dei rappresentabili è un ssv di V^* di dimensione

$$\dim \operatorname{Im} B_R = \dim V - \underset{\substack{\| \\ \operatorname{rad}(\beta)}}{\dim \operatorname{Ker} B_R}.$$

Inoltre:

Se $\varphi(u) = \beta(v_\varphi, u)\ \forall u$

notiamo: se $u \in \operatorname{rad} \beta$

$\Rightarrow \varphi(u) = 0$, cioè $\operatorname{rad}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$

cioè $\varphi \in \operatorname{Ann}(\operatorname{rad}\beta)$.

Ma $\dim \operatorname{Ann}(\operatorname{rad}\beta) = \dim V - \dim \operatorname{rad}\beta = \dim \operatorname{Im} B_R$

quindi φ è rappresentabile $\iff \operatorname{Ker}\varphi \supseteq \operatorname{rad}\beta$.

(è possibile anche mostrarlo direttamente: se $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq \operatorname{rad}\beta$ φ scende a $\tilde{\varphi} \in \left(V/_{\operatorname{rad}\beta}\right)^*$

β scende a $\tilde{\beta}$ su $V/_{\operatorname{rad}\beta}$ non degenere quindi $\tilde{\varphi}$ è rappresentabile rispetto a $\tilde{\beta}$: esiste $[v_{\tilde{\varphi}}] \in V/_{\operatorname{rad}\beta}$

t.c. $\underset{\beta(v_\varphi,\, u)}{\underset{\|}{\tilde{\beta}([v_{\tilde{\varphi}}], [u])}} = \underset{\varphi(u)}{\underset{\|}{\tilde{\varphi}([u])}} \quad \forall [u]$)

Cioè v_φ rappresenta φ.