Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1 B- I appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 Gennaio 2023

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $A \in M_2(\mathbb{Q})$, e sia $\alpha : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, definita da $\alpha(X) = AX - XA$.

a) Mostrare che se A è nilpotente allora α è un endomorfismo nilpotente.

b) Sia A nilpotente non nulla. Determinare la forma di Jordan di α.

c) Mostrare che se A è diagonalizzabile allora anche α lo è e determinare il suo polinomio minimo in funzione di quello di A.

Esercizio 2. Sia β una forma bilineare simmetrica non degenere su uno spazio vettoriale reale V di dimensione 4, che ammette una base formata da vettori isotropi. Determinare le possibili segnature di β dando per ognuna di esse un esempio di forma bilineare e di base formata da vettori isotropi.

Esercizio 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e, per $r \geq 2$ sia $L_{A,r} : M_{n,r}(\mathbb{K}) \to M_{n,r}(\mathbb{K})$ l'endomorfismo definito da: $L_{A,r}(X) = AX$.

a) Mostrare che $L_{A,r}$ non ha vettori ciclici.

b) Determinare i sottospazi $L_{A,r}$-invarianti in funzione di quelli A-invarianti.

c) Nel caso in cui A è nilpotente, determinare la forma di Jordan di $L_{A,r}$ in funzione di quella di A.

Esercizio 4. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ due matrici simmetriche con A definita positiva e B definita negativa. Mostrare che $tr(AB) < 0$.