Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 13 giugno 2022

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ le forme bilineari simmetriche su $\mathbb{Q}^4$ associate rispettivamente alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}$:
Per ognuna di queste forme bilineari dire se esiste, e, in caso affermativo, costruire, una base $\mathcal{B}_i$ tale che $M_{\mathcal{B}_i}(\beta_i) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.

i) Dare un esempio di matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che A^2 sia diagonalizzabile e A^3 non lo sia.

ii) Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice nilpotente. Mostrare che se A^2 è diagonalizzabile allora A^3 è diagonalizzabile.

iii) Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice tale che A^2 sia diagonalizzabile. Mostrare che A^3 è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia β una forma bilineare simmetrica non degenere su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione $n \geq 2$, e supponiamo che esista in V un vettore isotropo non nullo rispetto a β. Mostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

per qualche matrice $A \in M_{n-2}(\mathbb{K})$.

Esercizio 4.

a) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, con forma di Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che esistono infiniti sottospazi di V f-invarianti.

b) Sia g un endomorfismo di V, con forma di Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che g ha un numero finito di sottospazi invarianti.