Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 25 Luglio 2022

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano $f, g \in End(V)$.

i) Supponiamo che $f_{|Imf} = g_{|Img}$ abbiano la stessa forma canonica di Jordan. Stabilire se f e g hanno la stessa forma canonica di Jordan.

ii) Supponiamo che $f_{|Imf^2} = g_{|Img^2}$ abbiano la stessa forma canonica di Jordan. Stabilire se f e g hanno la stessa forma canonica di Jordan.

Esercizio 2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

a) Sia β_A la forma bilineare su $\mathbb{Q}^2$ definita dalla matrice A. Trovare una base di $\mathbb{Q}^2$ ortogonale rispetto a β_A.

b) Esistono vettori isotropi rispetto a β_A?

c) Trovare una base rispetto alla quale la matrice di β_A sia:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Stabilire se la matrice A è congruente (in $M_2(\mathbb{Q})$) alla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano A e B due matrici antisimmetriche in $M_3(\mathbb{R})$. Mostrare che A e B sono ortogonalmente simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Esercizio 4. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che A e $A^T A$ hanno lo stesso nucleo e quindi lo stesso rango.

ii) Stabilire se la precedente proprietà vale anche per matrici a coefficienti complessi.

iii) Quali delle seguenti matrici in $M_3(\mathbb{R})$ possono essere srcitte nella forma $A^T A$?
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 23 \end{pmatrix},$$